

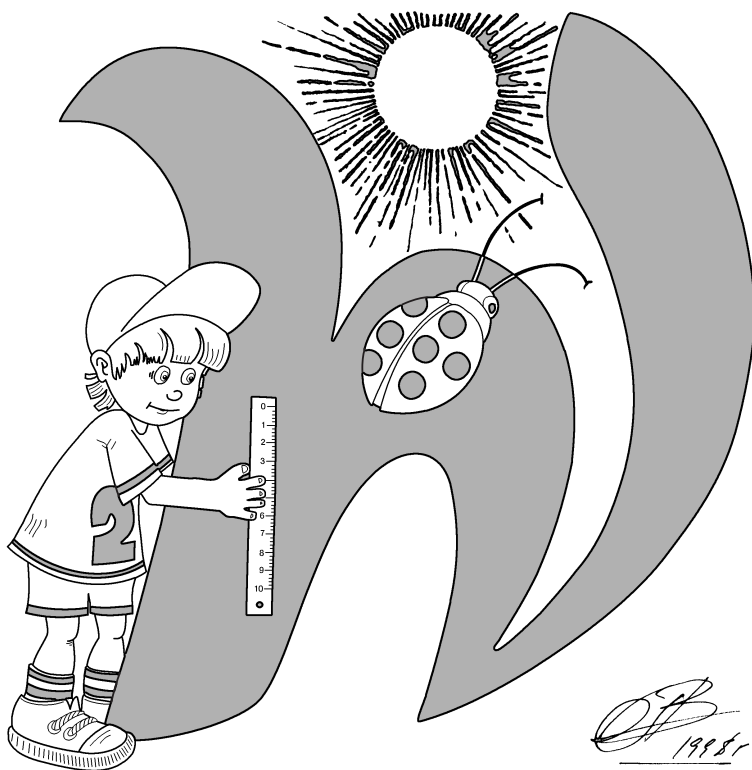
Методическая комиссия по физике  
при центральном оргкомитете  
Всероссийских олимпиад школьников

# XLVIII Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур

Методическое пособие



Санкт-Петербург, 2014 г.

Комплект задач подготовлен методической комиссией по физике при центральном оргкомитете Всероссийских олимпиад школьников  
Телефоны: (495) 408-80-77, 408-86-95.  
E-mail: [physolymp@gmail.com](mailto:physolymp@gmail.com)

## Авторы задач

### 9 класс

1. Слободянин В.
2. Замятнин М.
3. Воробьёв И.
4. Замятнин М.
5. Гордеев М.

### 10 класс

1. Замятнин М.
2. Кармазин С.
3. Шеронов А.
4. Александров Д.
5. Воробьёв И.

### 11 класс

1. Гуденко А.
2. Гуденко А.
3. Ерофеев И.
4. Варламов С.
5. Слободянин В.

Общая редакция — Кóзел С., Слободянин В.

Оформление и вёрстка — Паринов Д., Цыбров Ф.

При подготовке оригинал-макета  
использовалась издательская система  $\text{\LaTeX}$  2 $\epsilon$ .

© Авторский коллектив  
141700, Московская область, г. Долгопрудный  
Московский физико-технический институт

9 класс

**Задача 1. Экстремальная гонка**

Гоночный автомобиль (болид) преодолевает контрольный прямолинейный участок трассы со средней скоростью  $v_{\text{ср}}$ , причём, на всём этом участке он движется в одну и ту же сторону равноускоренно. Вычислите максимально и минимально возможные скорости болида ( $v_{\text{max}}$  и  $v_{\text{min}}$ , соответственно) в середине контрольного участка трассы.

**Задача 2. На балконе**

Экспериментатор Глюк бросает шарик от пинг-понга массой  $m$  с балкона 17 этажа вертикально вверх со скоростью  $v_0$ . При полёте на шарик действует сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости. Перед падением на землю шарик двигался с постоянной скоростью  $v_2$ . Найдите скорость шарика  $v_{\text{max}}$ , при которой его кинетическая энергия меняется быстрее всего в процессе движения.

**Задача 3. Подводные работы**

Водолазный колокол в форме цилиндра без дна, частично заполненный воздухом, находится под водой. Чтобы колокол не всплывал, его прикрепили тросом к дну водоёма. На верёвке к колоколу привязан груз, находящийся в воде (рис. 1). Площадь горизонтального сечения колокола  $S = 4 \text{ м}^2$ , объём воздуха в нём  $V = 8 \text{ м}^3$  при давлении  $p = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$ . Когда груз в колоколе поднимают над уровнем воды, давление возрастает на  $\Delta p = 250 \text{ Па}$ , при этом трос остаётся натянутым. Найдите изменение натяжения троса и верёвки. Плотность воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Воздух в колоколе подчиняется закону Бойля-Мариотта:  $pV = \text{const}$ , где  $p$  — давление,  $V$  — объём воздуха в колоколе.

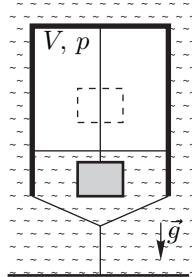


Рис. 1

Рис. 1

**Задача 4. Сосулька на нити**

Через тонкое отверстие, проходящее вдоль вертикальной оси цилиндрической сосульки, продега нить, на конце которой закреплен шарик из материала с очень высоким значением теплопроводности. В начале эксперимента шарик нагрет до некоторой температуры  $t_1$ , а температура сосульки равна температуре окружающего воздуха  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Из-за таяния льда сосулька опускается вниз (рис. 2), а талая вода вытекает в виде капель, при температуре  $t_0$ . При этом за шариком остается цилиндрический канал площадью  $S = 2 \text{ см}^2$ .

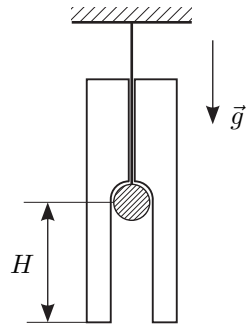


Рис. 2

1. Найдите начальную температуру  $t$  шарика, если в процессе эксперимента сосулька перестала опускаться тогда, когда шарик проплавил канал глубиной  $H = 10 \text{ см}$ .

2. Определите скорость  $v_0$  сосульки на начальной стадии эксперимента, если в момент времени, когда она опустилась на две трети глубины  $H$ , её скорость равнялась  $v_2 = 0,1$  мм/с.

Считайте мощность теплопередачи пропорциональной разности температур шарика и льда и что вся она идёт на плавление льда. Теплоёмкость шарика  $C = 59,4$  Дж/°С. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 330$  кДж/(кг · °С). Плотность льда  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>.

### Задача 5. Источник с компьютером

Экспериментатор Глюк сконструировал источник тока с регулируемым на выходе напряжением. В прибор он встроил миникомпьютер, показывающий протекший через источник заряд и среднюю силу тока (отношение всего протекшего заряда ко времени работы источника). Глюк присоединил к источнику резистор и, включив установку, начал регулировать напряжение. В результате ему удалось снять зависимость средней силы тока через резистор от времени (рис. 3). График на листе А4 должен быть выдан Вам вместе с условием.

В процессе эксперимента компьютер дал сбой, и зависимость протекшего заряда от времени оказалась утерянной.

- 1) Восстановите зависимость протекшего через источник заряда от времени  $q(t)$  и постройте на миллиметровой бумаге её график;
- 2) Определите сопротивление  $R$  резистора, если известно, что в точке А на нем выделялась мощность  $N_A = 0,16$  Вт;
- 3) Определите, максимальную мощность, выделявшуюся на резисторе во время эксперимента.

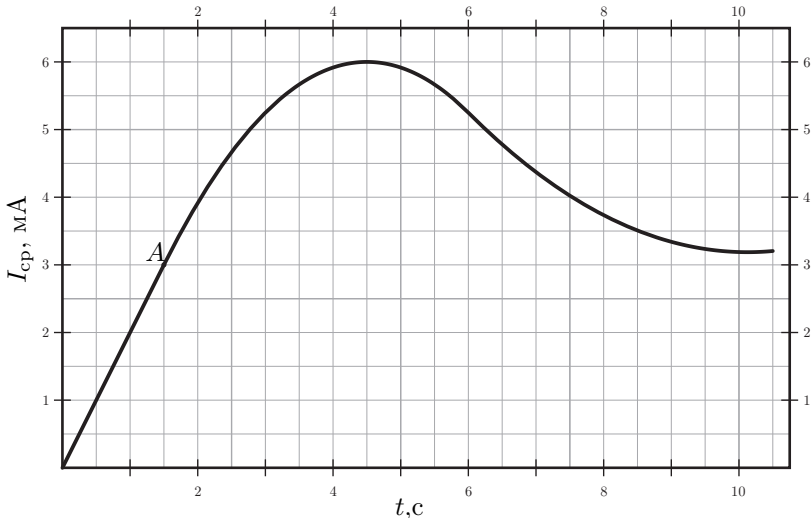


Рис. 3

10 класс

**Задача 1. Катапульта**

Игрушечная катапульта может стрелять сразу двумя шариками, выпуская их с одинаковыми по модулю начальными скоростями  $v_0$ , но направленными под разными углами к горизонту. Угол, под которым запускается один из шариков, можно менять как угодно. Конструкция катапульти такова, что после выстрела с горизонтальной плоскости оба шарика попадают в одну и ту же точку этой плоскости. После большого числа испытаний выяснилось, что максимальное из возможных расстояний между шариками в то время, пока они оба находились в воздухе, достигало  $L_{\max} = 19$  м. Определите начальную скорость  $v_0$  шариков. Примите  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 2. Катушка с проводом**

Лёгкий провод намотан на цилиндрическую катушку, которая надета на горизонтальный стержень (рис. 4). Для того чтобы катушка равномерно вращалась на стержне, необходимо тянуть за конец провода вертикально вниз с силой  $F_1$  или горизонтально, вдоль касательной к нижнему краю катушки, с силой  $F_2$ . Какова масса  $m$  катушки?

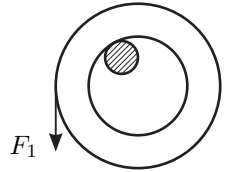


Рис. 4

**Задача 3. Охлаждение гелия**

При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры  $T_0$  до некоторой конечной температуры  $T_x$  в процессе с теплоемкостью  $C$ , прямо пропорциональной температуре  $T$ , газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объему. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение  $T_x/T_0$ .

**Задача 4. Источник стабильности**

Стабилизированный источник тока способен выдавать постоянный ток  $I_0$  независимо от подключённой к нему нагрузки. Источник включён в цепь, показанную на рисунке 5. Все элементы цепи можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке. До замыкания ключа конденсатор не был заряжен. В некоторый момент времени ключ замкнули. Какое количество теплоты  $Q$  выделилось на резисторе  $R$  после замыкания ключа?

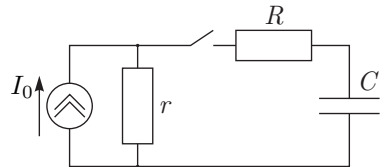
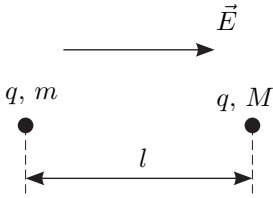


Рис. 5

**Задача 5. Разойдутся или нет?**



Две материальные точки с массами  $m$  и  $M$  ( $M > m$ ) и одинаковыми положительными зарядами  $q$  находятся на расстоянии  $l$  друг от друга в однородном электрическом поле  $E$ , направленном от  $m$  к  $M$  (рис. 6). В начальный момент скорости точек равны 0. Найдите максимальное расстояние между точками при их дальнейшем движении. Считайте, что точки всё время движутся вдоль одной прямой.

Рис. 6

## 11 класс

### Задача 1. Растяжение пружины

Тонкую невесомую пружину, растянутую на некоторую величину  $\Delta l_1$ , закрепили на гладком горизонтальном столе в точках  $A$  и  $B$ . Отношение периодов малых поперечных (рис. 7) и продольных (рис. 8) колебаний небольшого грузика, расположенного посередине пружины, равно  $n_1 = 4$ . После того как деформацию пружины увеличили на  $\Delta x = 3,5$  см, отношение периодов стало равно  $n_2 = 3$ . Найдите длину нерастянутой пружины  $l_0$ , а также значение деформации  $\Delta l_1$  в первом и деформации  $\Delta l_2$  во втором случаях. Считайте, что пружина в условиях опыта подчиняется закону Гука.

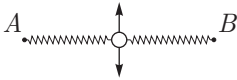


Рис. 7



Рис. 8

### Задача 2. Наноплавление

Температура плавления массивного образца олова  $t_0 = 232^\circ\text{C}$ . Температура плавления мельчайших оловянных шариков диаметром  $d = 20$  нм оказывается на  $25$  градусов ниже и равна  $t_d = 207^\circ\text{C}$ . Это так называемый размерный эффект, причём экспериментально установлено, что температура плавления зависит не только от размеров, но и от формы образца. При какой температуре будет плавиться оловянная фольга толщиной  $h = d$ ?

Считайте, что атомы олова в приповерхностном слое толщиной в  $2-3$  межатомных расстояния обладают некоторой избыточной энергией по сравнению с энергией атомов в объёме, а теплота плавления  $\lambda$  в пересчёте на один атом пропорциональна средней энергии связи  $U$  атомов в веществе и абсолютной температуре  $T$  фазового перехода (плавления):  $\lambda \sim U \sim T$ .

Молярная масса олова  $\mu = 119\text{г/моль}$ . Плотность олова  $\rho = 7,31\text{г/см}^3$ .

### Задача 3. Восьмёрка лорда Кельвина

В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, произведённого над неизвестным количеством  $\nu$  азота. В координатах  $(C, T)$ , где  $C$  — теплоёмкость газа, а  $T$  — температура, график цикла представляет собой четыре отрезка  $abefcb$  (рис. 9). К сожалению, положение начала координат оказалось утраченным. Пояснительные записи указывали, что  $C_d = 1,000$  Дж/К,  $C_a = 0,715$  Дж/К, а также что

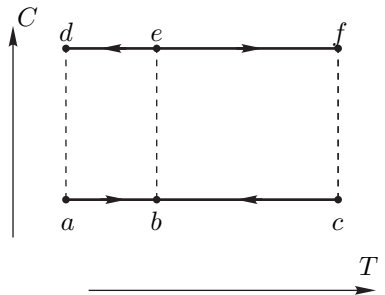


Рис. 9

$$T_c - T_b = 2(T_b - T_a) = 200 \text{ К}, \quad \text{и} \quad \frac{p_c}{p_a} = \frac{V_c}{V_a}.$$

1. Найдите работу газа  $A$  за цикл и КПД цикла  $\eta$ .
2. Определите значения температуры  $T_a$ ,  $T_b$  и  $T_c$ .
3. Нарисуйте график цикла в координатах  $(p, V)$  и определите количество вещества  $\nu$ .

*Примечание.* Процесс с постоянной теплоёмкостью  $C$  называется политропным и для него справедливо соотношение:

$$pV^n = \text{const},$$

где  $n$  — постоянная, показатель политропы.

#### Задача 4. Электроудар

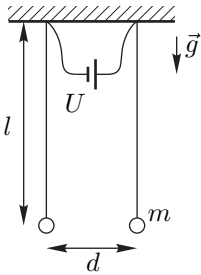


Рис. 10

К горизонтальному непроводящему потолку на тонких металлических проволоках длиной  $l = 1$  м на расстоянии  $d = 10$  см друг от друга подвешены два одинаковых стальных шарика радиусом  $r = 5$  мм и массой  $m = 4$  г (рис. 10). В начальный момент шарики не заряжены и покоятся. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Электрическая постоянная  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

1. Определите период  $T$  малых свободных колебаний шариков.
2. К точкам крепления проволок подключают источник напряжения  $U$  с большим внутренним сопротивлением  $R = 10^{15}$  Ом. При каком значении  $U = U_{\min}$  шарики столкнутся через некоторое время?
3. Найдите время  $t_0$ , через которое разность потенциалов между шариками достигнет значения  $U_{\min}$  если  $U = U_0 = 1,0 \cdot 10^6$  В.

#### Задача 5. В архиве Снеллиуса

В архиве Снеллиуса нашли чертёж оптической схемы, на которой была изображена линза, положение точечного источника света  $S_0$  и его изображения  $S_1$ . От времени чернила выцвели, и на схеме осталось видно только положение оптической оси линзы, источника  $S_0$ , изображения  $S_1$  и одного из фокусов  $F$  (рис. 11). Построением циркулем и линейкой без делений восстановите возможные положения линзы.



Рис. 11



## Возможные решения

### 9 класс

#### Задача 1. Экстремальная гонка

**Графическое решение.** Время движения болида  $t_0 = L/v_{\text{ср}}$ , где  $L$  — длина участка. На графике  $v(t)$  возможные способы движения болида представляются прямыми с разными наклонными (ускорениями), причём, площадь под графиком (длина пути) одинакова (рис. 12).

Обозначим момент времени при котором болид находится в середине пути  $t'$ . На графике это время расположено так, что площади под графиком слева и справа от него равны. Заметим, что при увеличении по модулю ускорения  $a$  значение  $t'$  сдвигается в сторону больших скоростей, и скорость в середине пути  $v$  увеличивается.

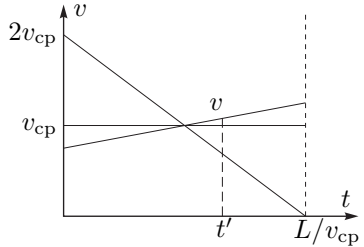


Рис. 12

Наименьшая скорость  $v_{\text{min}}$  достигается при  $a = 0$  и равна средней скорости  $v_{\text{ср}}$ , а максимальная  $v_{\text{max}}$  будет достигнута при движении с максимальным ускорением и нулевой начальной (или конечной) скоростью. Конечная скорость при таком движении  $v_{\text{к}} = 2v_{\text{ср}}$ . Длина контрольного участка равна:

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2}{2a},$$

половина пути:

$$\frac{L}{2} = \frac{v_{\text{max}}^2}{2a}.$$

Отсюда следует, что максимальная скорость в середине участка равна  $v_{\text{max}} = v_{\text{к}}/\sqrt{2} = \sqrt{2}v_{\text{ср}}$ .

**Аналитическое решение.** Пусть начальная скорость болида  $v_0$ , а ускорение при движении равно  $a$ . Тогда длина контрольного участка трассы

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2 - v_0^2}{2a}, \quad (1)$$

половина пути:

$$\frac{L}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим выражение для скорости в середине трассы:

$$v^2 = \frac{v_{\text{к}}^2 + v_0^2}{2}.$$

Так как движение равноускоренное, то средняя скорость  $v_{\text{cp}}$  выражается через  $v_{\text{к}}$  и  $v_0$  следующим образом:

$$v_{\text{cp}} = \frac{L}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + \frac{v_{\text{к}} - v_0}{2} = \frac{v_0 + v_{\text{к}}}{2}.$$

Начальная и конечная скорости неотрицательны, поэтому для начальной скорости верно условие  $0 < v_0 < 2v_{\text{cp}}$ .

Выразим скорость в середине пути  $v$  через  $v_0$  и  $v_{\text{cp}}$ :

$$v^2 = 2v_{\text{cp}}^2 - 2v_0v_{\text{cp}} + v_0^2 = (v_{\text{cp}} - v_0)^2 + v_{\text{cp}}^2.$$

Минимальная скорость  $v_{\text{min}}$  достигается при  $v_0 = v_{\text{cp}}$  и равна  $v_{\text{cp}}$ . Максимальная скорость  $v_{\text{max}}$  достигается при  $v_0 = 0$  или  $v_0 = 2v_{\text{cp}}$  и равна  $\sqrt{2}v_{\text{cp}}$ .

### Задача 2. На балконе

Скорость изменения кинетической энергии тела — это мощность приложенных к нему сил. На шарик действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По условию, сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}.$$

Суммарная мощность сил, приложенных к шарiku:

$$N = (m\vec{g} + \vec{F}_c) \cdot \vec{v} = mgv - \alpha v^2, \quad (3)$$

где  $v$  — проекция скорости шарика  $\vec{v}$  на ось, направленную вертикально вниз.

При падении шарик будет ускоряться, пока сила сопротивления не уравновесит силу тяжести. Зная скорость установившегося движения  $v_2$ , найдём коэффициент  $\alpha$ , записав для шарика второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вниз, и приравняв ускорение к 0:

$$0 = mg - \alpha v_2, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{mg}{v_2}.$$

В процессе движения  $v$  меняется от  $-v_0$  до  $v_2$ .

Выражение для мощности (3) можно привести к виду:

$$N = \frac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha \left( v - \frac{mg}{2\alpha} \right)^2.$$

График этой зависимости — парабола с вершиной  $v_1 = mg/(2\alpha)$ , показанная на рисунке 13.

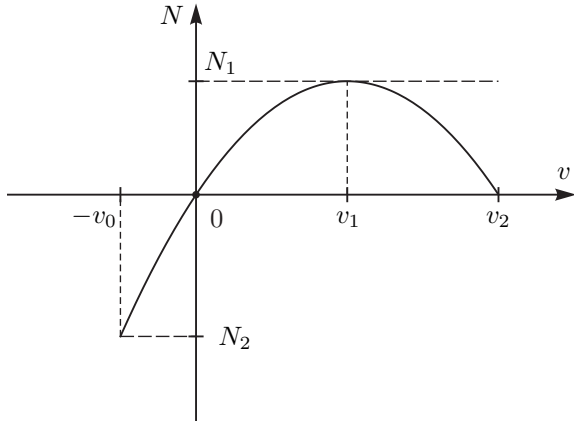


Рис. 13

Как видно из графика, максимальная (по модулю) скорость изменения кинетической энергии достигается либо при  $v = v_1$ , либо при  $v = -v_0$ . В первом случае, мощность  $N_1 = \frac{(mg)^2}{4\alpha}$ , во втором  $N_2 = \frac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha \left( v_0 + \frac{mg}{2\alpha} \right)^2$ .

Сравнив  $N_1$  и  $N_2$  найдём, что при  $v_0 < v_k = \frac{(\sqrt{2} - 1)mg}{2\alpha}$   $N_1 > N_2$  и, следовательно,  $v_{\max} = v_1$ ; при  $v_0 > v_k$   $N_2 > N_1$  и  $v_{\max} = v_0$ ; при  $v_0 = v_k$  верны оба ответа.

### Задача 3. Подводные работы

Чтобы вычислить изменение объёма воздуха в колоколе, воспользуемся законом Бойля-Мариотта:  $pV = (p + \Delta p)(V - \Delta V)$ . Из него следует, что объём воздуха уменьшится на:

$$\Delta V = V \left( \frac{\Delta p}{p + \Delta p} \right) = 0,0133 \text{ м}^3.$$

Рассмотрим равновесие системы «колокол + груз + столб воды внутри колокола». На систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести, сила натяжения троса  $F_1$  и силы гидростатического давления на верхнюю и нижнюю поверхность системы (не все силы показаны на рисунке 14). После поднятия груза объём воздуха уменьшится, освобождённый объём  $\Delta V$  займет вода массой  $\rho \Delta V$ . При этом из всех внешних сил, действующих на систему, изменятся только сила натяжения троса и сила тяжести, действующая на воду внутри колокола. Таким образом, сила натяжения троса уменьшится на

$$\Delta F = \rho \Delta V g = 133 \text{ Н}.$$

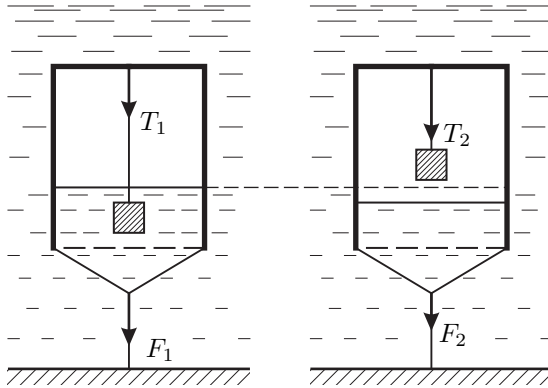


Рис. 14

На колокол действуют сила тяжести, сила гидростатического давления, сила давления воздуха и силы натяжений троса и верёвки. Из них при поднятии груза изменяются силы натяжений и сила давления воздуха. Силы натяжения направлены вниз, сила давления воздуха — вверх. Давление увеличивается, сила натяжения троса уменьшается, значит, сила натяжения верёвки увеличивается, причём:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \Delta p S + \Delta F = 1000 \text{ Н} + 133 \text{ Н} = 1133 \text{ Н}.$$

#### Задача 4. Сосулька на нити

Пусть в некоторый момент температура шарика равна  $t$ , а глубина канала  $h$ . Запишем уравнение теплового баланса:

$$C(t_1 - t) = \lambda m = \lambda \rho S h. \quad (4)$$

Здесь  $m$  — масса растопленного льда. Из записанного уравнения можно найти начальную температуру шарика:

$$t_1 = t_0 + \frac{S H \rho \lambda}{C} = 100^\circ \text{C}.$$

Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур между шариком и льдом. С другой стороны, скорость опускания сосульки тоже связана с мощностью отводимого от шарика тепла

$$\lambda \rho S v = \alpha(t - t_0), \quad (5)$$

где  $\alpha$  — постоянный размерный коэффициент. Из уравнения (4) выразим температуру  $t$  и подставим её в формулу (5):

$$\lambda \rho S v = \alpha \left( t_1 - \frac{\lambda \rho S h}{C} - t_0 \right), \quad \text{откуда} \quad v = \alpha \left( \frac{t_1 - t_0}{\lambda \rho S} + \frac{h}{C} \right),$$

то есть скорость сосульки линейно зависит от расстояния, на которое она опустилась (рис. 15).

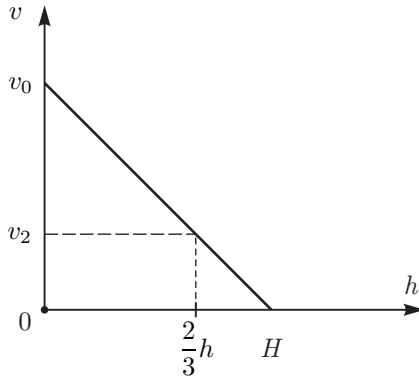


Рис. 15

Тогда вначале эксперимента скорость сосульки  $v_0 = 3v_2 = 0,3$  мм/с.

### Задача 5. Источник с компьютером

1) Чтобы получить зависимость протекшего через источник заряда от времени, воспользуемся предложенным определением среднего тока:

$$I_{\text{cp}} = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I_{\text{cp}} t$$

Заряд, протекший через источник за время  $t$ , численно равен площади прямоугольника  $q = I_{\text{cp}} t$ . Найдя прошедший заряд для нескольких ( $>15$ ) точек, построим зависимость  $q(t)$  (рис. 16).

2) Поскольку участок  $OA$  – линейный, то силу тока в момент времени  $t_A$  можно найти и из следующих соображений:

$$I_{\text{cp}} = \frac{q}{t} = \alpha t \rightarrow q = \alpha t^2$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \alpha \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \approx \alpha \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2\alpha t = 2I_{\text{cp}} t$$

Для точки  $A$ :  $I_A = 2t_A \cdot I_{\text{cp}}(t_A) = 6$  мА

Сопротивление резистора  $R$  найдем из закона Джоуля-Ленца:

$$R = \frac{N_A}{I_A^2} = 4,44 \text{ кОм}$$

3) Максимальной силе тока соответствует точка  $B$  с наибольшим угловым коэффициентом на графике  $q(t)$  (здесь – точка перегиба).

$$t_B = 3 \text{ с} \quad I_{\text{max}} = 8,25 \text{ мА}$$

Вновь воспользуемся законом Джоуля-Ленца:

$$N_{max} = RI_{max}^2 = 0,3025 \text{ Вт}$$

Заметим, что максимальная сила тока и максимальная **средняя** сила тока достигаются не одновременно.

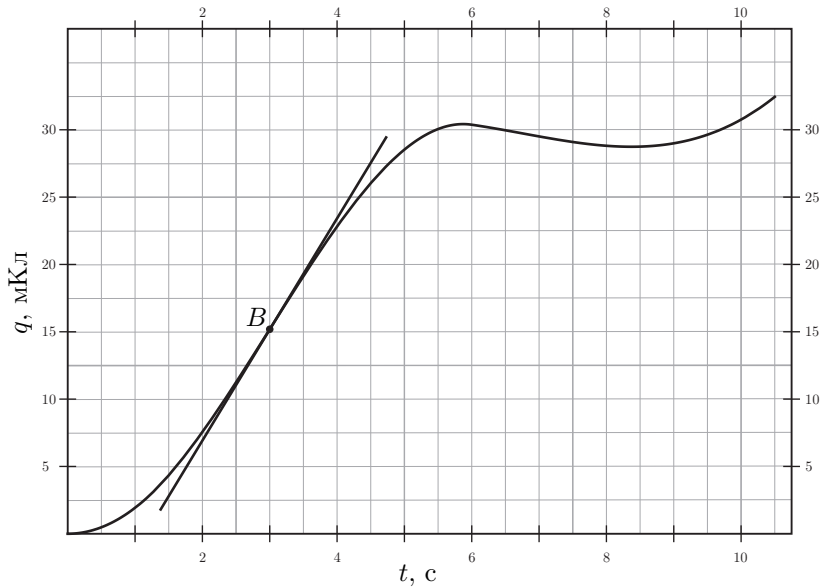


Рис. 16

10 класс

**Задача 1. Катапульта**

Дальность полёта шарика, выпущенного из катапульты под углом  $\varphi$ , равна

$$L = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

Так как шарики, имеющие одинаковую начальную скорость, попадают в одну и ту же точку, углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  относительно горизонта, под которыми их выпускают, удовлетворяют условию  $2\varphi_1 = 180^\circ - 2\varphi_2$ , что эквивалентно выражению:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 90^\circ \quad (7).$$

Векторы их начальных скоростей направлены симметрично относительно луча, образующего угол  $45^\circ$  с горизонтом (рис. 17). Время, в течение которого оба шарика находятся в полете, определяется временем полета нижнего шарика (верхний шарик летит дольше):

$$t_{\text{п}} = \frac{2v_0 \sin(45^\circ - \alpha)}{g}. \quad (8)$$

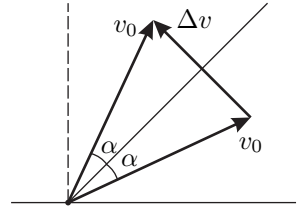


Рис. 17

Перейдём в систему отсчета, начало координат которой совпадает с нижним шариком, а ориентация осей в пространстве неизменна в течение всего полёта. В этой системе отсчёта верхний шарик движется равномерно и прямолинейно со скоростью

$$\Delta v = 2v_0 \sin \alpha. \quad (9)$$

За время  $t_{\text{п}}$  он успеет удалиться на расстояние

$$L = \Delta v t_{\text{п}} = \frac{4v_0^2}{g} \sin \alpha \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{2v_0^2}{g} (\cos(2\alpha - 45^\circ) - \cos 45^\circ). \quad (10)$$

Максимум этого выражения достигается при  $\cos(2\alpha - 45^\circ) = 1$ , то есть когда  $\alpha = 22,5^\circ$ . Значит,

$$L_{\text{max}} = \frac{2v_0^2}{g} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Откуда начальная скорость равна

$$v_0 = \sqrt{\frac{L_{\text{max}} g}{2 - \sqrt{2}}} = 18 \text{ м/с.}$$

**Задача 2. Катушка с проводом**

*Решение 1.*

Пусть  $R$  — внешний радиус катушки,  $r$  — внутренний радиус,  $\mu$  — коэффициент трения между стержнем и катушкой,  $\vec{Q}$  — полная реакция опоры, которую можно представить как сумму силы нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  и силы трения скольжения  $\vec{F}_{\text{тр}}$  ( $\vec{Q} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$ ).

На рисунках 18 и 19 показаны силы, действующие на катушку в процессе ее равномерного разматывания под действием силы  $F$ .

Заметим, что между внутренней поверхностью катушки и стержнем будет действовать сила трения, причём отношение модулей сил  $F_{\text{тр}}$  и  $Q$  зависит только от коэффициента трения, но не от силы  $F$ . Отсюда

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{Q_1}{Q_2}.$$

Из равенства моментов сил относительно центра катушки

$$FR = F_{\text{тр}}r.$$

получаем

$$\frac{F_{\text{тр}1}}{F_{\text{тр}2}} = \frac{F_1}{F_2}.$$

Заметим также, что

$$Q_1 = F_1 + P,$$

и,

$$Q_2 = \sqrt{F_2^2 + P^2}.$$

Решив полученную систему уравнений, найдём

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{F_1 + P}{\sqrt{F_2^2 + P^2}}.$$

откуда получаем искомую массу:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$



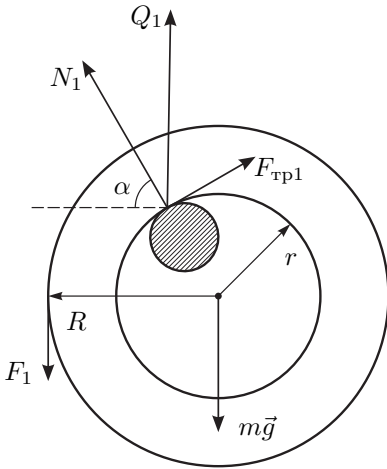


Рис. 18

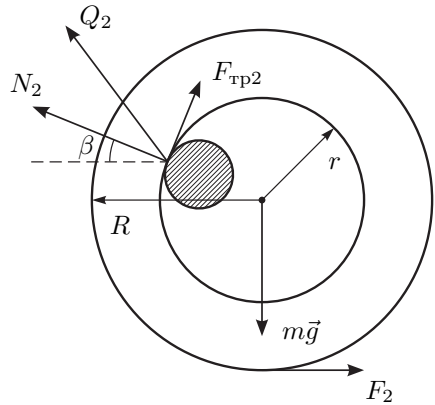


Рис. 19

Решение 2 («в лоб»). Пусть  $\alpha$  — угол между направлением силы  $N_1$  и горизонталью. Условие равенства нулю равнодействующей всех сил в проекции на горизонтальную ось имеет вид:

$$\mu N_1 \sin \alpha - N_1 \cos \alpha = 0 \quad (11)$$

а в проекции на вертикальную ось

$$N_1 \sin \alpha + \mu N_1 \cos \alpha = P + F_1. \quad (12)$$

Условие равенства моментов сил относительно центра катушки имеет вид:

$$\mu N_1 r = F_1 R. \quad (13)$$

Возведем (11) и (12) в квадрат и сложим их:

$$N_1^2 + (\mu N_1)^2 = (P + F_1)^2. \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда нить тянут горизонтально (рис. 19). Обозначим символом  $\beta$  угол между силой реакции опоры  $N_2$  и горизонталью. Уравнения аналогичные (11) — (14) для второго случая принимают вид

$$\mu N_2 \sin \beta + N_2 \cos \beta = P, \quad (15)$$

$$N_2 \sin \beta - \mu N_2 \cos \beta = F_2, \quad (16)$$

$$\mu N_2 r = F_2 R.$$

Аналогично решая полученную систему уравнений (15) и (16), найдем:

$$N_2^2 + (\mu N_2)^2 = P^2 + F_2^2. \quad (17)$$

Делим уравнение (14) на (17) и получаем:

$$\frac{(P + F_1)^2}{P^2 + F_2^2} = \frac{N_1^2}{N_2^2} = \frac{F_1^2}{F_2^2},$$

откуда следует ответ:

$$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2 - F_2^2)}.$$

*Примечание: формально одним из решений является  $P = 0$ , однако тогда равнодействующая силы реакции и силы трения должна быть противоположна силе  $F_1$  и направлена по той же прямой. Это возможно только в том случае, если  $R = r$ .*

### Задача 3. Охлаждение гелия

Согласно первому закону термодинамики  $Q = \Delta U + A$ . Работу газа на начальном этапе охлаждения найдём, вычислив площадь под графиком (рис. 20):

$$A = -\frac{1}{2}(P_0V_0 - P_1V_1) = -\frac{1}{2}(RT_0 - RT_1) = \frac{R}{2}\Delta T.$$

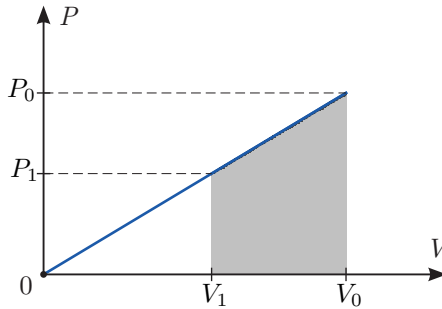


Рис. 20

Следовательно, в начале процесса охлаждения теплоёмкость равнялась:

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta U + \delta A}{\Delta T} = C_V + \frac{R}{2} = 2R.$$

Следовательно, теплоёмкость рассматриваемого процесса

$$C = 2R\frac{T}{T_0}. \quad (18)$$

Работа газа будет отрицательной до тех пор, пока газ не примет минимальный объем (точка  $C$  на рисунке 21). В этой точке  $\Delta V = 0$ , а значит теплоёмкость

$$C = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = C_V = \frac{3}{2}R. \quad (19)$$

Приравняв (19) к (18), найдём температуру  $T_c$ , при которой объём газа достигает своего минимума:

$$T_c = \frac{3}{4}T_0.$$

Так как суммарная работа газа равна нулю, то положительная работа  $A_+$  (площадь под участком  $CX$  графика) равна по модулю отрицательной работе  $A_-$  (площади под участком  $OC$  графика). Найдём искомую работу газа, воспользовавшись первым законом термодинамики:  $Q_{OC} = \Delta U + A_{OC}$ , где  $Q_{OC}$  — тепло, полученное газом на участке  $OC$ . Его найдём как площадь под графиком  $C(T)$ . Поскольку график линейный

$$Q_{OC} = -\frac{2R}{T_0} \frac{T_0^2 - T_c^2}{2} = -\frac{7}{16}RT_0.$$

Изменение внутренней энергии на этом же участке:

$$\Delta U = U_c - U_0 = C_V(T_c - T_0) = -\frac{3}{8}RT_0,$$

откуда  $A_{OC} = Q_{OC} - \Delta U = -\frac{RT_0}{16}$ . Искомая работа  $A_{CX} = -A_{OC} = \frac{RT_0}{16}$ .

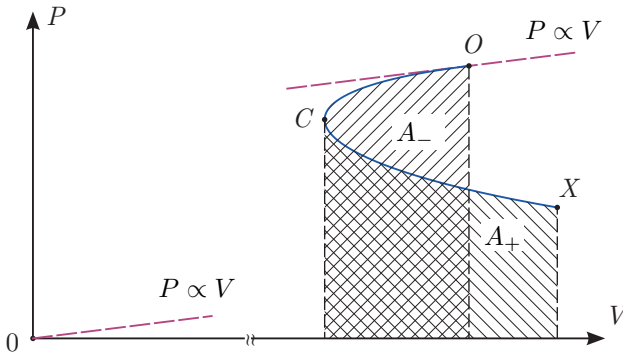


Рис. 21

Найдём температуру  $T_x$ , при достижении которой работа становится равной нулю:

$$A = Q - \Delta U = \frac{2R}{T_0} \frac{T_x^2 - T_0^2}{2} - C_V(T_x - T_0) = \frac{R}{T_0}(T_x - T_0)(T_x + T_0 - \frac{3}{2}T_0),$$

откуда  $T_x/T_0 = 1/2$ .

#### **Задача 4. Источник стабильности**

Пусть  $I$  — сила тока в резисторе  $R$ ,  $J$  — сила тока в резисторе  $r$ ,  $q$  — заряд, протекший через резистор  $R$  после замыкания ключа (заряд конденсатора). За достаточно малое время, для которого изменением напряжения на резисторе  $R$  можно пренебречь, выделившееся на резисторе тепло равно произведению этого напряжения на протекший заряд:

$$\delta Q = U \Delta q = IR \Delta q.$$

Отсюда следует, что полное тепло численно равно умноженной на  $R$  площади под графиком зависимости силы тока  $I$  через резистор  $R$  от протекшего через него заряда  $q$ . Найдём эту зависимость. Из уравнений

$$I_0 = I + J, \quad Jr = IR + \frac{q}{C},$$

получаем

$$I_0 r = I(r + R) + \frac{q}{C}.$$

Таким образом, график зависимости  $I(q)$  представляет собой прямую, пересекающую оси в точках  $(I_0 r)/(r + R)$  и  $CI_0 r$ . Площадь под этим графиком

$$S = \frac{1}{2} I_0 \frac{r}{r + R} CI_0 r = \frac{CI_0^2 r^2}{2(r + R)}.$$

Отсюда находим ответ

$$Q = SR = \frac{CRI_0^2 r^2}{2(r + R)}.$$

#### **Задача 5. Разойдутся или нет?**

Из второго закона Ньютона найдём ускорение точки массы  $m$

$$a_1 = -k \frac{q^2}{mr^2} + \frac{qE}{m}$$

и ускорение точки массы  $M$

$$a_2 = k \frac{q^2}{Mr^2} + \frac{qE}{M}.$$

Здесь  $r$  — расстояние между точками,  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , за положительное выбрано направление от  $m$  к  $M$ . Найдём относительное ускорение точек:

$$a_{\text{отн}} = a_2 - a_1 = k \frac{q^2}{r^2} \frac{M + m}{Mm} - qE \frac{M - m}{Mm}.$$

Таким же уравнением описывается движение точечного заряда  $q$  массой  $\mu = (M + m)/(Mm)$ , находящегося в поле неподвижного точечного заряда  $q$  и в однородном поле  $-E_1 = -E(M - m)/(M + m)$ . Будем рассматривать эту эквивалентную задачу. Потенциальная энергия заряда:

$$U(r) = k \frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$

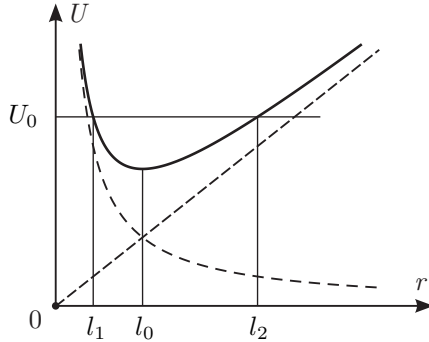


Рис. 22

Из графика зависимости  $U(r)$  (рис. 22) видим, что движение заряда происходит в ограниченной области  $l_1 \leq r \leq l_2$ ,  $l_1$  и  $l_2$  — корни уравнения

$$U_0 = k \frac{q^2}{r} + qE_1 r.$$

или

$$r^2 - \frac{U_0}{qE_1} r + \frac{kq}{E_1} = 0.$$

По теореме Виета произведение корней не зависит от  $U_0$  и равно  $l_1 l_2 = l_0^2$ , где  $l_0 = \sqrt{kq/E_1}$ . Таким образом, получаем, что если начальное расстояние  $l$  меньше, чем  $l_0$ , то расстояние между зарядами будет увеличиваться до максимального значения  $l_0^2/l$ , а затем уменьшаться. Если же  $l < l_0$ , то начальное расстояние и будет максимальным. При  $l = l_0$  расстояние между зарядами меняться не будет.

Ответ: максимальное расстояние между зарядами равно  $l$  при  $l \geq \sqrt{kq/E_1}$  и равно  $kq/lE_1$  при  $l < \sqrt{kq/E_1}$ .

## 11 класс

### Задача 1. Растяжение пружины

Если жёсткость всей пружины длиной  $l$  равна  $k$ , то период продольных колебаний груза можно найти по формуле:

$$T_{\parallel}^2 = 4\pi^2 \frac{m}{4k},$$

где  $m$  — масса груза.

Уравнение движения груза в поперечном направлении имеет вид:

$$m\varphi'' \frac{l}{2} = -2F_{\text{упр}} \varphi = -2k\Delta l \varphi \iff \varphi'' + \frac{4k\Delta l}{ml} \varphi = 0.$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega_{\perp}^2 = (4k\Delta l)/(ml)$ , их период:

$$T_{\perp}^2 = 4\pi^2 \frac{ml}{4k\Delta l} = 4\pi^2 \frac{m}{4k} \left(1 + \frac{l_0}{\Delta l}\right).$$

Отношение периодов:

$$\frac{T_{\perp}^2}{T_{\parallel}^2} = n^2 = 1 + \frac{l_0}{\Delta l}, \quad \text{откуда} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{n^2 - 1}.$$

Поскольку  $\Delta x = \Delta l_2 - \Delta l_1$ :

$$\frac{\Delta x}{l_0} = \frac{1}{n_2^2 - 1} - \frac{1}{n_1^2 - 1} = \frac{n_1^2 - n_2^2}{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)},$$

откуда

$$l_0 = \frac{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)}{n_1^2 - n_2^2} \Delta x = 60 \text{ см},$$

$$\Delta l_1 = \frac{l_0}{n_1^2 - 1} = 4 \text{ см},$$

$$\Delta l_2 = \frac{l_0}{n_2^2 - 1} = 7,5 \text{ см}.$$

### Задача 2. Наноплавление

Уменьшение температуры плавления для нанобъектов связано с увеличением (при уменьшении объёма) доли приповерхностных атомов, обладающих избыточной энергией  $\Delta U$  по сравнению с объёмными атомами. Для образцов различной формы эти доли оказываются разными. Для шариков доля атомов в приповерхностном слое толщиной  $\delta$ :

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{4\pi R^2 \delta}{4\pi R^3/3} = 3\delta/R = 6\delta/d.$$

Оценим толщину приповерхностного слоя. Объём, приходящийся на один атом олова равен:

$$v = \frac{1}{\rho} \frac{\mu}{N_A},$$

а следовательно характерное межатомное расстояние  $a = \sqrt[3]{v} \approx 1,86 \text{ нм}$ . Приповерхностный слой в таком случае имеет размеры порядка 4-6 нм, что существенно меньше 20 нм.

Теплота плавления уменьшается на величину избыточной энергии всех приповерхностных атомов:

$$\Delta q_0 = \Delta U \Delta N = (\Delta U N) 6\delta/d.$$

Новая теплота плавления:

$$q = q_0 - \Delta q_0 = q_0 - (\Delta U N) 6\delta/d.$$

В пересчёте на атом:

$$q/N = q_0/N - \Delta U (6\delta/d).$$

Учитывая, что  $q/N = \alpha T_d$  и  $q_0/N = \alpha T_0$  ( $\alpha$  – коэффициент пропорциональности), получаем относительное понижение температуры плавления нанопартикла по сравнению с массивным образцом:

$$\Delta T_d/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{6\delta}{d}.$$

Доля атомов в приповерхностном слое толщиной  $\delta$  фольги площадью  $S$ :

$$\Delta N/N = \Delta V/V = \frac{2S\delta}{Sh} = 2\delta/h = 2\delta/d.$$

Соответственно, относительное понижение температуры плавления фольги:

$$\Delta T_h/T_0 = \frac{\Delta U}{\alpha T_0} \frac{2\delta}{d} = \Delta T_d/\Delta T_h = 3.$$

Это соотношение хорошо подтверждается экспериментально:

$$\Delta T_h = 1/3 \Delta T_d \approx 8,30^\circ \text{C} \rightarrow t_h = t_0 - \Delta T_h \approx 223,7^\circ \text{C}.$$

**Задача 3. Восьмёрка лорда Кельвина**

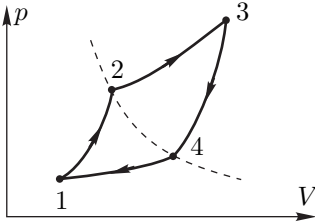


Рис. 23

Качественно изобразим процесс на графике в привычных  $(p, V)$  координатах (рис. 23). График состоит из четырёх политроп: процессу  $ab$  соответствует процесс 12,  $ef$  — 23,  $cb$  — 34,  $ed$  — 41. Также важно отметить, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме ( $T_2 = T_4 = T_b$ ).

1. Поскольку теплота, переданная газу в процессе с постоянной теплоёмкостью, равна  $Q = C\Delta T$ , то в координатах  $CT$  теплота процесса численно

равна площади под графиком. Из графика видно, что на участке 12 и 23 тепло подводится, а на участках 34 и 41 — отводится. Полная подведённая теплота  $Q_+$  и отданная теплота  $Q_-$ :

$$Q_+ = Q_{12} + Q_{23} = C_a(T_2 - T_1) + C_d(T_3 - T_2) = 271,5 \text{ Дж.}$$

$$Q_- = Q_{34} + Q_{41} = -C_a(T_3 - T_2) - C_d(T_2 - T_1) = -243 \text{ Дж.}$$

По первому началу термодинамики полная теплота в цикле равна работе, совершённой газом:

$$A = Q_+ + Q_- = 28,5 \text{ Дж,} \quad \text{тогда} \quad \eta = \frac{A}{Q_+} = 0,105.$$

2. Из уравнения политропы и уравнения состояния идеального газа  $pV/T = \text{const}$  следует связь между  $T$  и  $V$ :

$$TV^{n-1} = \text{const}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{1-n}} = \frac{V}{V_0}. \quad (20)$$

Запишем (20) для четырёх процессов:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_1}{V_2}, \quad \left(\frac{T_2}{T_3}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_2}{V_3}, \quad \left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1}{1-n_a}} = \frac{V_3}{V_4}, \quad \left(\frac{T_4}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n_d}} = \frac{V_4}{V_1}.$$

Перемножим все равенства:

$$\left(\frac{T_1 T_3}{T_2 T_4}\right)^{\frac{n_a - n_d}{(1-n_a)(1-n_d)}} = 1, \quad \text{откуда} \quad T_1 T_3 = T_2 T_4 = T_2^2. \quad (21)$$

Запишем (21), используя  $T_2 = T_1 + T_0$  и  $T_3 = T_1 + 3T_0$ , где  $T_0 = 100 \text{ К}$ :

$$T_1(T_1 + 3T_0) = (T_1 + T_0)^2, \quad \text{откуда} \quad T_1 = T_0.$$

Таким образом, получим  $T_1 = 100 \text{ К}$ ,  $T_2 = 200 \text{ К}$  и  $T_3 = 400 \text{ К}$ .



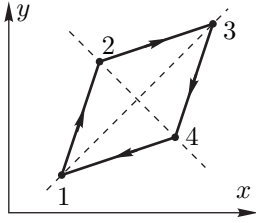


Рис. 24

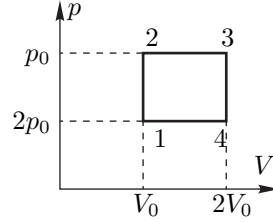


Рис. 25

3. Найдём связь между показателем политропы  $n$  и теплоёмкостью  $C$ . Дифференцируя (20), найдём связь между приращениями  $\Delta V$  и  $\Delta T$ :

$$V^{n-1}\Delta T + (n-1)TV^{n-2}\Delta V = 0, \quad \text{откуда} \quad \Delta V = \frac{\Delta T}{1-n} \frac{V}{T}.$$

Запишем первый закон термодинамики:

$$\Delta Q = C\Delta T = \Delta U + A = C_V\Delta T + p\Delta V = C_V\Delta T + p \frac{\Delta T}{1-n} \frac{V}{T}$$

$$(C - C_V)\Delta T = \frac{\Delta T}{1-n} \frac{pV}{T} = \frac{\nu R\Delta T}{1-n}.$$

Таким образом,

$$n = 1 - \frac{\nu R}{C - C_V} = \frac{C - C_p}{C - C_V}.$$

Взяв логарифм от уравнения политропы, получим:

$$\ln \frac{p}{p_0} + n \ln \frac{V}{V_0} = \text{const},$$

откуда следует, что в координатах  $xy$ , где  $x = \ln V/V_0$ , а  $y = \ln p/p_0$ , график политропы представляет прямую с наклоном  $-n$ , следовательно, график всего цикла будет параллелограммом, у которого точки 2 и 4 лежат на прямой  $x + y = \text{const}$  (рис. 24). Из условия  $p_1/p_3 = V_1/V_3$  находим, что точки 1 и 3 лежат на прямой  $x - y = \text{const}$ . Таким образом, диагонали параллелограмма перпендикулярны следовательно, график цикла является ромбом. Поскольку диагональ 13 ромба является биссектрисой, то углы наклона политроп в сумме дают  $90^\circ$ , откуда следует, что произведение угловых коэффициентов равна 1:

$$n_a n_d = \frac{C_p - C_a}{C_a - C_V} \cdot \frac{C_p - C_d}{C_d - C_V} = 1, \quad \text{откуда} \quad C_a + C_d = C_p + C_V = \nu(c_p + c_V),$$

где  $c_p$  и  $c_V$  — молярные теплоёмкости. Окончательно найдём:

$$\nu = \frac{C_a + C_d}{c_p + c_V} = 34,4 \text{ ммоль}.$$

Заметим, что  $C_a = \nu c_v$ , а  $C_d = \nu c_p$ , следовательно, цикл процесса состоит из двух изобар и двух изохор (рис. 25).

### Задача 4. Электрорудар

1. Период колебаний каждого из шариков  $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 2,0$  с.
2. Шарики считаем точечными зарядами. При отклонении проволок от вертикали на небольшой угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$ ) в сторону сближения сила кулоновского притяжения  $F_q = kq^2/(d-2\alpha l)^2$  уравновешивается равнодействующей сил тяжести и натяжения проволок  $F_p = mg\alpha$ :

$$k\frac{q^2}{(d-2\alpha l)^2} = mg\alpha \quad \rightarrow \quad k\frac{q^2}{mg} = \alpha(d-2\alpha l)^2 = f(\alpha).$$

Функция  $f(\alpha) = \alpha(d-2\alpha l)^2$  имеет максимум при  $\alpha_0 = d/(6l)$ . Этому значению соответствует максимальное значение заряда шариков:

$$kq_{\max}^2 = mg\alpha_0(d-2\alpha_0 l)^2 = \frac{2mgd^3}{27l} \quad \rightarrow \quad q_{\max} = \sqrt{\frac{2mgd^3}{27kl}}.$$

Для отклонения шариков на больший, чем  $\alpha_0$  угол, вплоть до столкновения, требуется меньший заряд, а значит, при сколь угодно незначительном превышении  $q_{\max}$  шарики под действием Кулоновского взаимодействия достаточно быстро притянутся (за время не превышающее  $T$ ) и взаимно разрядившись вновь разойдутся, пока вновь не приобретут необходимый для столкновения критический заряд  $q_{\max}$ . Разность потенциалов между шариками при  $q_{\max}$  равна минимальному значению напряжения источника, при котором шарики столкнутся:

$$U_{\min} = \varphi_+ - \varphi_- = k\frac{q_{\max}}{r} - \left(-k\frac{q_{\max}}{r}\right) = 2\sqrt{\frac{2kmgd^3}{27lr^2}} = 64,6 \text{ кВ}.$$

3. Поскольку  $U_{\min} \ll U_0 = 1$  МВ, ток заряда можно считать постоянным  $I = U_0/R$  и время заряда до значения  $q_{\max}$  можно рассчитать по формуле:

$$\tau = \frac{q_{\max}}{I} = \frac{U_{\min} r}{2k} \frac{R}{U_0} = 18 \text{ с}.$$

### Задача 5. В архиве Снеллиуса

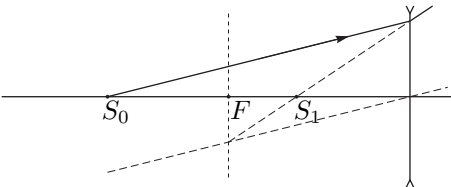


Рис. 26

Для начала проведём качественный анализ того, где может располагаться линза и какой она может быть.

**Рассеивающая линза.** Изображение в рассеивающей линзе всегда мнимое и лежит по ту же сторону от

линзы, что и источник, причем расстояние от линзы до изображения меньше расстояния от линзы до источника. Таким образом, условию удовлетворяет рассеивающая линза, которая находится правее  $S_1$  (рис. 26).

**Собирающая линза.** Изображение может быть как мнимым, так и действительным. Мнимое (причем, увеличенное) изображение расположено от линзы всегда дальше чем источник, поэтому линза, дающая мнимое изображение, расположена слева от  $S_0$  (рис. 27).

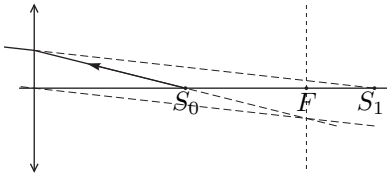


Рис. 27

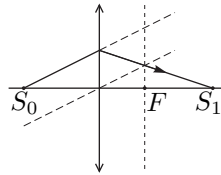


Рис. 28

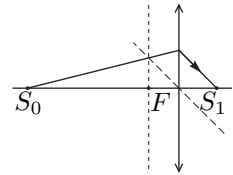


Рис. 29

Если линза расположена между источником  $S_0$  и изображением  $S_1$ , то изображение — действительное. Так как линза имеет два фокуса, то точка  $F$  может лежать как справа (рис. 28), так и слева от линзы (рис. 29).

Таким образом, существуют четыре решения!

Теперь найдём точные координаты оптических центров этих линз и выполним построения. Пусть расстояние от источника света до фокуса равно  $d$ , до изображения —  $L$ , а до линзы —  $x$ . Запишем формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{|x|} \pm \frac{1}{|L-x|} = \pm \frac{1}{|d-x|}, \quad (22)$$

где знак плюс в левой части соответствует действительному изображению, а минус — мнимому. В то время как знак плюс перед оптической силой линзы соответствует собирающей линзе, а знак минус — рассеивающей.

Данные в задаче точки  $S_0$ ,  $F$  и  $S_1$  делят оптическую ось на четыре промежутка, в каждом из которых модули в уравнении (22) будут раскрываться с различными знаками.

Найдём все решения уравнения (22). Раскроем знаки на промежутке  $S_0F$ . Как мы заметили выше, здесь может располагаться только собирающая линза, тогда:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} = \frac{1}{d-x},$$

$$x^2 - 2Lx + Ld = 0 \rightarrow L - x = \mp \sqrt{L(L-d)},$$

причем решение со знаком минус попадает в рассматриваемый нами промежуток.

Решая по аналогии уравнение (22) на оставшихся трёх промежутках, найдём, что ещё две собирающих линзы находятся в точках  $x = \pm\sqrt{Ld}$ , а в точке  $L - x = \sqrt{L(L - d)}$  находится рассеивающая линза.

Все построения в данной задаче сводятся к построению корней из произведений длин отрезков. В курсе геометрии доказывается, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу. Таким образом, найдём  $\sqrt{S_0S_1 \cdot FS_1}$  и  $\sqrt{S_0S_1 \cdot S_0F}$  и отложим полученные отрезки от точки  $S_0$  вправо и от точки  $S_1$  в обе стороны, соответственно.

Пошаговая инструкция к построению (рис. 30):

1. Отложим на оптической оси отрезок длины  $S_0S_1 = L$  вправо от точки  $S_1$ . Обозначим точку  $M_1$ .
2. Найдём среднее геометрическое от длин  $FS_1 = L - d$  и  $L$ . Для этого построим окружность на диаметре  $FM_1$ . Найдём точку пересечения перпендикуляра к оптической оси, проходящего через  $S_1$  и окружности —  $P_1$ . Длина отрезка  $S_1P_1$  равна  $\sqrt{L(L - d)}$ .
3. Отложим отрезки длины  $S_1P_1$  влево ( $O_1$ ) и вправо ( $O_2$ ) от  $S_1$  на оптической оси. Левая линза окажется собирающей, а правая — рассеивающей.
4. Отложим на оптической оси отрезок длины  $S_0S_1 = L$  влево от точки  $S_0$ . Обозначим точку  $M_0$ .
5. По аналогии с пунктом 2 построим окружность на диаметре  $M_0F$  и перпендикуляр  $S_0P_0$ , длина которого равна  $\sqrt{Ld}$ .
6. Отложим отрезки длиной  $S_0P_0$  вправо ( $O_3$ ) и влево ( $O_4$ ) от точки  $S_0$  на оптической оси. Эти линзы являются собирающими.

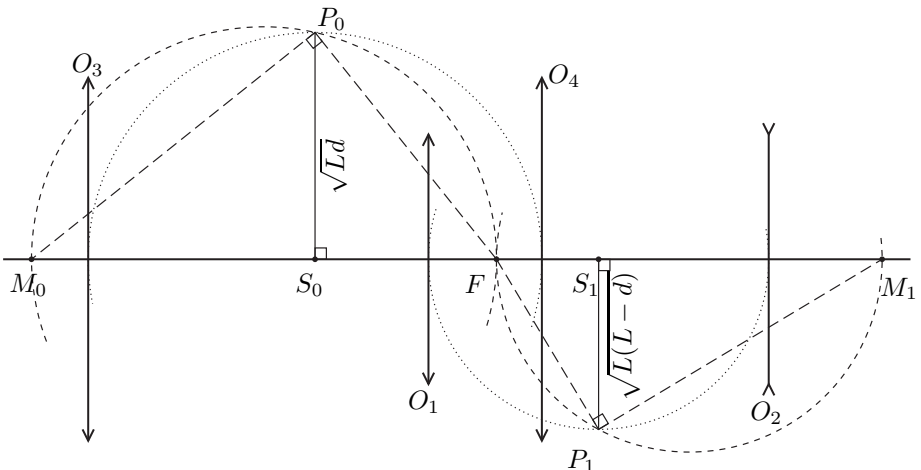


Рис. 30