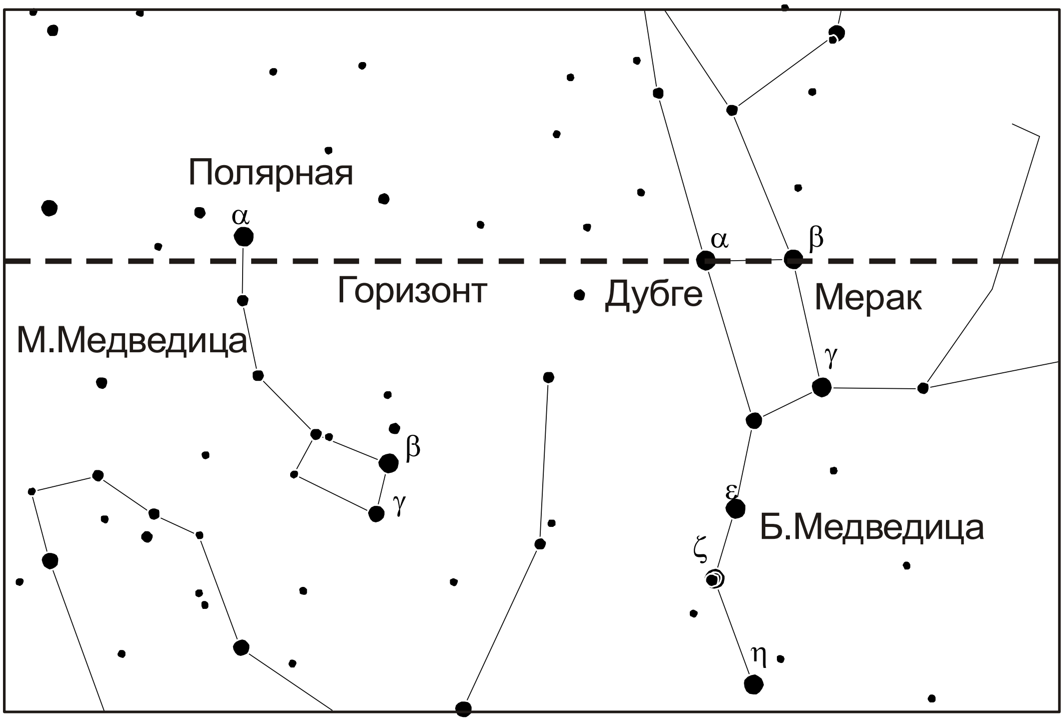
Региональный этап – 2013

9 класс

1. Условие. В некоторой точке Земли звезды Дубге и Мерак (α и β Большой Медведицы) одновременно появились над горизонтом. Чему (примерно) равна широта точки наблюдения?

1. Решение. Звезды Дубге и Мерак – крайние западные звезды ковша Большой Медведицы. Эти звезды – основа самого известного и легкого способа поиска Полярной звезды, так как линия, проведенная от Мерака к Дубге и продолженная далее, проходит очень близко от Полярной звезды.



По условию задачи, звезды Дубге и Мерак одновременно появляются над горизонтом. Следовательно, соединяющая их линия совпадает с горизонтом, и Полярная звезда также наблюдается на горизонте. Это может иметь место только вблизи экватора, на широте 0°.

1. Рекомендации для жюри. Решение задачи разбивается на три этапа. На первом этапе участники олимпиады должны указать, что Полярная звезда находится вблизи линии, соединяющей Дубге и Мерак. Этот этап оценивается в 2 балла. Далее необходимо сделать вывод, что Полярная звезда должна находиться вблизи горизонта, что оценивается в 3 балла. Окончательный вывод о широте места наблюдения оценивается еще в 3 балла. Решение может быть дополнено рисунком, но он не является обязательным.

2. Условие. Космический аппарат стартует с поверхности Земли со скоростью 0.00001 (или 10^{-5}) парсек в год. Сколько ему потребуется времени, чтобы без последующей работы двигателей достичь окрестностей звезды α Центавра? Расстояние до α Центавра составляет 4.4 световых года.

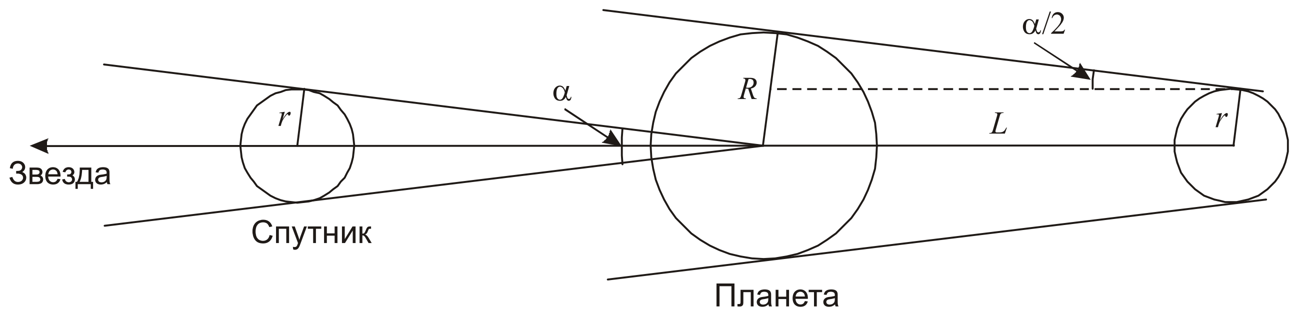
2. Решение. Один парсек – это расстояние, с которого радиус орбиты Земли виден под углом 1″ (1/206265 радиан). Это расстояние равно 206265 а.е. Скорость 0.00001 парсек в год соответствует примерно 2 а.е. или 300 млн км в год. Один год содержит около $3 \cdot 10^7$ секунд, поэтому стартовая скорость корабля составляет 10 км/с. Это меньше второй (и, соответственно, третьей) космической скорости для поверхности Земли. Поэтому корабль не сможет улететь не только из Солнечной системы, но даже из окрестностей Земли. Окрестностей звезды α Центавра он не достигнет никогда.

2. Рекомендации для жюри. При решении задания участники олимпиады могут пойти по ошибочному пути, приняв скорость аппарата постоянной во времени. В этом случае аппарат мог бы достигнуть окрестностей звезды α Центавра (расстояние 4.3 световых года или 1.35 парсек) за 135 тысяч лет. Подобный вариант решения при условии правильно выполненных расчетов оценивается в 3 балла.

В случае правильного хода решения перевод величины скорости в км/с оценивается в 4 балла, вывод о том, что эта скорость недостаточна, для того, чтобы покинуть Солнечную систему – в 3 балла, формулировка ответа – в 1 балл. Указание того, что аппарат не сможет даже улететь от Земли, не является обязательным.

3. Условие. У некоторой планеты, обращающейся вокруг далекой звезды по круговой орбите, есть спутник, его орбита также круговая. Во время затмений звезды спутником при наблюдении с планеты видимые размеры звезды и спутника совпадают (как у Луны и Солнца на Земле), а когда спутник входит в тень планеты, его угловые размеры совпадают с угловыми размерами тени. Найдите соотношение геометрических размеров планеты и спутника, считая их существенно меньшими их взаимного расстояния, а само расстояние – существенно меньшим расстояния до звезды.

3. Решение. Изобразим положение планеты и спутника во время затмений центральной звезды и спутника, наблюдаемых с планеты:



Тень спутника представляет собой конус с углом раствора α, равным угловому диаметру звезды и спутника при наблюдении из центра планеты (размеры планеты считаем существенно меньшими расстояния до спутника). Обозначив радиус спутника через r, а его расстояние от планеты – через L, получаем связывающее их выражение:

$$r = L\,\alpha / 2.$$

Расстояние до звезды существенно больше радиуса орбиты спутника, тень самой планеты представляет собой конус с таким же углом раствора. Из условия равенства размеров тени планеты и спутника получаем

$$R - r = L\,\alpha / 2.$$

Отсюда $R = 2r$, планета вдвое больше своего спутника по радиусу.

3. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является правильное построение рисунка, показывающего конфигурации планеты и спутника во время затмений обоих типов.

Правильное построение (или правильное представление этой конфигурации, выраженное в тексте), оценивается в 4 балла. Вычисление соотношений размеров планеты и спутника оценивается еще в 4 балла. Оно может быть сделано как алгебраически (на основе выражений для видимого диаметра тени планеты), так и чисто геометрически, оба подхода могут считаться правильными.

4. Условие. В некотором пункте Земли в ночь на 1 января звездное время совпало с московским летним временем (действовавшим в 2012 году). Какова географическая долгота этого пункта? Уравнением времени пренебречь.

4. Решение. За 10 дней до наступления Нового года, 21-22 декабря, происходит зимнее солнцестояние. Прямое восхождение Солнца в это время составляет 18 часов, а звездное время в солнечную полночь – 6 часов. Если пренебречь уравнением времени, то каждый день прямое восхождение Солнца увеличивается на 4 минуты. В новогоднюю ночь оно будет равно 18 часов 40 минут. Звездное время в солнечную полночь S_0 составит 6 часов 40 минут. Понятия истинного и среднего солнечного времени мы не вводим, так как пренебрегаем уравнением времени, и данные временные шкалы совпадают. Обозначим местное солнечное время в указанном в условии пункте через T. Тогда звездное время будет равно

$$S = S_0 + T.$$

Время T связано со Всемирным временем UT соотношением

$$T = UT + \lambda,$$

где λ – географическая долгота пункта. Московское летнее время (в часах) равно

$$T_M = UT + 4.$$

По условию задачи, величины S и T_M совпадают. Отсюда

$$S_0 + T = T - \lambda + 4,$$
$$\lambda = 4 - S_0.$$

Долгота места равна –2ч40м или 40° западной долготы.

4. Рекомендации для жюри. При решении задачи допускается перестановка действий и изменение используемой терминологии. К примеру, можно вычислять величины звездного и местного времени на меридиане Гринвича, и только в конце решения перейти к нужному значению долготы. При проверке решения нужно отметить в нем базовые факты, которые могут отмечаться как отдельно, так и по ходу выкладок в решении. Первый из них – вычисление прямого восхождения Солнца и/или звездного времени в новогоднюю полночь. Этот вывод оценивается в 2 балла. Связь звездного времени и солнечного времени оценивается еще в 1 балл. Следующие два базовых элемента – связь местного солнечного и московского времени со Всемирным временем. Эти элементы оцениваются по 1 баллу. Возможен прямой вывод связи солнечного и московского времени, который оценивается теми же 2 баллами. Сочетание всех фактов и вычисление долготы оценивается еще в 3 балла.

5. Условие. 6 мая 2012 года средства массовой информации сообщили о «суперлунии» – полнолунии, совпавшем с прохождением Луны через перигей орбиты. Сообщалось, что наблюдаемые размеры и яркость Луны в этот день значительно больше обычных значений. Найдите, насколько в реальности отличался в это время видимый размер Луны и освещенность, создаваемая ей на поверхности Земли, от среднего полнолуния и от полнолуния в апогее.

5. Решение. Эксцентриситет лунной орбиты *e* составляет 0.055. Эта величина несколько меняется со временем, что не оказывает принципиального влияния на ответ задачи. Расстояние от Земли до Луны в перигее орбиты равно

$$r_P = a\,(1 - e),$$

где a – большая полуось орбиты Луны, она же – среднее расстояние от Луны до Земли. Видимый диаметр Луны d обратно пропорционален расстоянию, и в момент «суперлуния» он будет больше среднего значения

$$\frac{d_P}{d_0} = \frac{a}{a(1-e)} \approx 1 + e.$$

Полная Луна в «суперлунии» будет иметь видимый поперечник, на 5.5% больший, чем у «средней» полной Луны. Если же сравнивать «суперлуние» с полнолунием в апогее, на расстоянии $a\,(1+e)$, то соотношение диаметров будет равно

$$\frac{d_P}{d_A} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} \approx 1 + 2e$$

или 1.11, то есть разница составит 11%.

Освещенность от Луны обратно пропорциональна квадрату расстояния до Луны или, что то же самое, пропорциональна квадрату видимого диаметра. Сравнивая «суперлуние» со средним полнолунием, получаем

$$\frac{E_P}{E_0} = \left(\frac{d_P}{d_0}\right)^2 = \frac{a^2}{a^2(1-e)^2} \approx 1 + 2e,$$

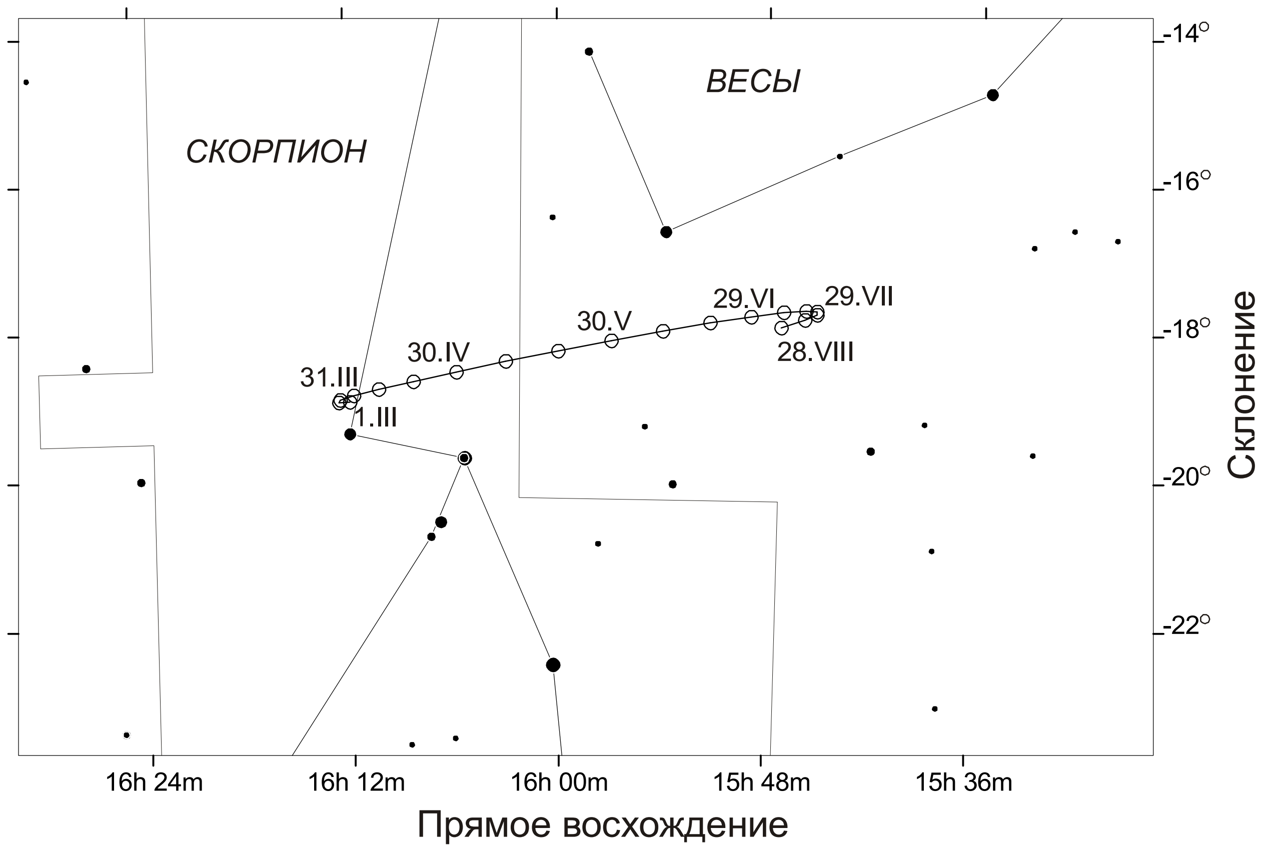
а с полнолунием в апогее:

$$\frac{E_P}{E_A} = \left(\frac{d_P}{d_A}\right)^2 = \frac{a^2(1+e)^2}{a^2(1-e)^2} \approx 1 + 4e.$$

Разница составляет 11% и 22% соответственно.

5. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является представление о том, как меняется расстояние до Луны вследствие эллиптичности ее орбиты. Правильное выражение для расстояния до Луны в перигее (апогее) орбиты оценивается в 2 балла. Корректное вычисление изменения видимого диаметра Луны оценивается в 4 балла (по 2 балла за сравнение со средним полнолунием и полнолунием в апогее). Еще 2 балла выставляется за правильное вычисление изменения освещенности (по 1 баллу для каждого случая). Записывать приближенные формулы с учетом малости величины *e* не обязательно, вычисления могут быть сделаны на основе точных формул.

6. Условие. На рисунке показан трек планеты Солнечной системы (положение среди звезд в разные моменты времени). Положения, отмеченные кружками, отстоят друг от друга на 10 дней, даты подписаны через 30 дней. Что это за планета?



6. Решение. Трек показывает видимое перемещение планеты в течение полугода (с марта по август). За это время планета вначале движется в прямом направлении, затем разворачивается и движется попятно, а затем вновь прямо. В середине дуги попятного движения, в мае, планета оказывается на границе созвездий Весов и Скорпиона, противоположно Солнцу (в чем можно убедиться также по координатам, указанным на карте). Следовательно, это внешняя планета, и в середине дуги попятного движения она вступила в противостояние с Солнцем.

Используя шкалу склонений, приведенных на карте, можно определить ее масштаб, а также видимую (угловую) скорость перемещения планеты вблизи противостояния во второй половине мая. Угловое расстояние между положениями планеты 20 и 30 мая составляет 0.75°, то есть угловая скорость равна 0.075° в день.

Пусть радиус орбиты планеты равен r, а радиус орбиты Земли – r_0. В момент противостояния планета располагается на расстоянии $(r - r_0)$ от Земли. Скорости Земли r_0 и планеты v сонаправлены (наклон и эллиптичность орбиты планет не вносит существенного отклонения), и видимая угловая скорость планеты равна

$$\omega = \frac{v_0 - v}{r - r_0}.$$

Из III закона Кеплера или из выражения для первой космической скорости можно получить соотношение скоростей планеты и Земли:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

Подставляя вторую формулу в первую, получаем:

$$\omega = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1-(r_0/r)^{1/2}}{1-(r_0/r)} = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1}{1+(r_0/r)^{1/2}} = \frac{v_0}{r+(r_0 r)^{1/2}}.$$

Обозначим отношение (r/r_0) – радиус орбиты в астрономических единицах – через a. Тогда последнее соотношение примет вид:

$$\omega = \frac{v_0}{r_0} \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}} = \omega_0 \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость орбитального вращения Земли, равная 0.986° в сутки. Мы получаем квадратное уравнение

$$a\omega + \sqrt{a}\,\omega - \omega_0 = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень:

$$a = \left(\frac{\sqrt{1+4\omega_0/\omega} - 1}{2} \right)^2.$$

Подставляя измеренное по графику значение ω, получаем радиус орбиты планеты: 10 а.е. Это планета Сатурн.

6. Рекомендации для жюри. Приведенное решение является одним из способов точно определить радиус орбиты планеты, из чего можно выяснить, какая именно это планета. Существуют другие как точные, так и приближенные методы, оценивать которые следует, исходя из их адекватности.

В частности, для дальних внешних планет, к которым относится Сатурн, можно определить длину дуги попятного движения (6.8°) и приравнять ее к удвоенному значению наибольшей элонгации Земли при наблюдении с планеты. Этот метод по сути пренебрегает орбитальным движением планеты и дает завышенную оценку ее расстояния от Солнца – 16 а.е. Вывод, что мы наблюдаем планету Уран, в этом случае оценивается 2 баллами, а указание, что оценка завышена, и мы наблюдаем Сатурн – 6 баллами.

При использовании метода, описанного выше, измерение угловой скорости по треку оценивается в 2 балла, составление уравнения для этой величины – в 3 балла, его решение – в 2 балла и указание названия планеты – в 1 балл.

Если правильный ответ (Сатурн) дан без каких-либо корректных обоснований, участнику олимпиады выставляется 3 балла.

10 класс

1. Условие. 22 июня в солнечный полдень наблюдатель, стоящий вертикально на ровной поверхности, обнаружил, что его тень имеет длину, равную его росту. На какой широте располагался наблюдатель?

1. Решение. Равенство высоты вертикального предмета и длины его тени на горизонтальной поверхности означает, что высота Солнца h составляет 45°. Так как картина наблюдается в солнечный полдень, Солнце располагается в верхней кульминации. Его высота в это время равна

$h = 90° – φ + δ$, если Солнце располагается к югу от зенита ($φ > δ$),
$h = 90° – δ + φ$, если Солнце располагается к северу от зенита ($φ < δ$).

Данные соотношения можно написать в виде одной формулы:

$$h = 90° – |φ – δ|.$$

22 июня (в летнее солнцестояние) склонение Солнца δ положительно и равно углу наклона экватора к эклиптике ε (23.4°). Из предыдущих формул получаем выражение для широты места:

$$φ = ε ± (90° – h).$$

Указанная картина могла наблюдаться на широтах –21.6° и +68.4°.

1. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задания является вывод о значении величины высоты Солнца над горизонтом. Этот этап оценивается в 2 балла. Запись соотношения для высоты Солнца в верхней кульминации может быть сделана участником олимпиады как в виде двух формул, так и одной формулой с применением модуля. Вместо высоты можно использовать соотношения для зенитного расстояния Солнца, каждый из этих подходов считается правильным и оценивается в 2 балла (в случае двух формул – по 1 баллу за каждую). Решение уравнения и формулировка ответа оценивается в 4 балла – по 2 балла за каждое из возможных решений. Таким образом, если в решении идет поиск только одного значения широты, итоговая оценка не может превышать 5 баллов.

2. Условие. Масса атмосферы Венеры составляет $4.8 \cdot 10^{20}$ кг. В ней на каждые 1000 молекул приходится 965 молекул углекислого газа CO_2 и 35 молекул азота N_2. 97% массы атмосферы Титана приходится на долю азота и 3% – на долю метана CH_4. Атмосферное давление на поверхности Титана в полтора раза превышает атмосферное давление на поверхности Земли. В какой из атмосфер масса азота больше и во сколько раз?

2. Решение. Рассчитаем сначала массу азота в атмосфере Венеры. Масса газа может быть выражена через число молекул *N*, молярную массу этого газа μ и число Авогадро *A* следующим образом:

$$m = \frac{N}{A}\mu,$$

Запишем отношение массы азота в атмосфере Венеры к массе всей её атмосферы:

$$\frac{m_{N2}}{m_{ATM}} = \frac{N_{N2}}{N_{ATM}} \cdot \frac{\mu_{N2}}{\mu_{ATM}}.$$

Отношение числа молекул азота к числу всех частиц в атмосфере дано в условии. Молярная масса азота равна 0.028 кг/моль. Молярная масса газа атмосферы Венеры будет очень близка к молярной массе углекислого газа (0.044 кг/моль), поскольку он является основным компонентом атмосферы. Если учесть примесь азота, то значение молярной массы практически не изменится (0.0434 кг/моль). Получаем, что масса азота в атмосфере Венеры равна 10^{19} кг.

Массу атмосферы Титана можно вычислить из следующих соображений. Вся масса атмосферы m_{ATM} давит на всю поверхность Титана:

$$p = \frac{m_{\text{АТМ}}\, g}{S} = \frac{m_{\text{АТМ}}\, GM}{4\pi R^4}.$$

Здесь g – ускорение свободного падения на поверхности Титана, M и R – масса и радиус Титана. Масса атмосферы равна

$$m_{\text{АТМ}} = \frac{4\pi p R^4}{GM}.$$

или $9\cdot 10^{18}$ кг. Это примерно равно массе азота в атмосфере Венеры, а сама атмосфера Титана состоит из азота практически полностью. В итоге, масса азота в атмосфере Венеры совсем ненамного (примерно на 10%) больше, чем в атмосфере Титана.

2. Рекомендации для жюри. Решение задачи разбивается на две части. В первой части участнику необходимо рассчитать массу азота в атмосфере Венеры. Это оценивается в 4 балла. В частности, за вычисление молярной массы атмосферы Венеры выставляется 1 балл. За переход от объемной к массовой доле выставляется 3 балла. В случае, если участник не делает этого перехода и считает, что масса азота составляет 0.035 массы атмосферы Венеры, эта часть задачи не засчитывается, и итоговая оценка не может превышать 3 баллов.

Во второй части задачи участнику необходимо вычислить массу атмосферы Титана. За правильное вычисление он получает 3 балла. Еще 1 балл выставляется за правильный вывод о соотношении масс азота в обеих атмосферах. Этот балл может быть выставлен только в том случае, если обе части задачи решены верно.

3. Условие. Будущие поселенцы Луны наблюдают явление метеора у темного края диска Земли, с трудом различимое визуально в телескоп с диаметром объектива 30 см. Какой блеск будет иметь этот метеор на Земле, если он наблюдается в зените? С каким объектом неба он сравним по яркости?

3. Решение. Проницающая способность человеческого глаза составляет около 6^m, однако кратковременный и движущийся источник света с таким блеском заметить не удастся. Опытный наблюдатель метеоров с адаптированным к темноте зрением замечает эти явления при блеске до 5^m. Используя телескоп с диаметром объектива D, можно увеличить проницающую способность:

$$m = 5 + 5 \lg D/d,$$

где d – диаметр зрачка глаза (в среднем 0.6 см). Для 30-см телескопа мы получаем величину проницающей способности при наблюдении метеоров: 13.5^m. Метеор, с трудом наблюдавшийся космонавтами, имел примерно такой блеск. Радиус орбиты Луны R составляет 384 тыс. км. Так как он существенно больше радиуса Земли, можно считать, что именно такое расстояние отделяло космонавтов от метеора. Наблюдатели на Земле располагаются к нему существенно ближе – если метеор виден в зените, расстояние до него равно его высоте H. Типичные высоты метеоров составляют порядка 100 км. Отсюда мы получаем звездную величину метеора на Земле:

$$m_0 = m + 5 \lg H/R = 5 + 5 \lg (HD/Rd) \sim -4^m.$$

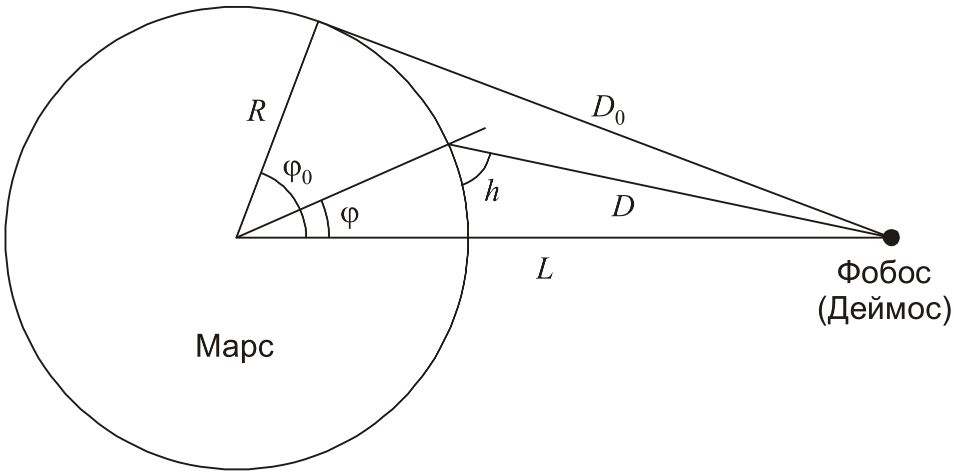
Это был яркий болид, по блеску сравнимый с Венерой.

3. Рекомендации для жюри. Для решения задачи участники олимпиады должны определить проницающую силу телескопа при наблюдении метеоров (в виде формулы или численно).

Эта часть задачи оценивается в 3 балла. Если в качестве проницающей способности глаза принимается величина 6^m (как для звезд), оценка снижается не более, чем на 1 балл. Правильное указание высоты метеора (допускаются значения от 70 до 120 км) оценивается в 2 балла, вычисление звездной величины по формуле Погсона – в 2 балла, указание Венеры как объекта похожей яркости – еще в 1 балл.

4. Условие. Опишите вид Фобоса и Деймоса с поверхности Марса для наблюдателя на различных марсианских широтах. В каких пределах изменяется их видимый диаметр и фаза в зависимости от широты? Считать, что спутники обращаются в плоскости экватора планеты.

4. Решение. Оба спутника Марса обращаются вокруг него практически в плоскости экватора планеты на небольшом расстоянии от нее. Поэтому вблизи полюсов Марса они не могут быть видны из-за своего суточного параллактического смещения. Для того, чтобы определить, на каких широтах Марса можно увидеть спутник, обратимся к рисунку:



Максимальная (по модулю) широта, на которой можно увидеть спутник, составляет

$$\varphi_0 = arccos\frac{R}{L},$$

где R – радиус Марса, L – радиус орбиты спутника. Значение широты равно 69° для Фобоса и 82° для Деймоса.

Пусть наблюдатель находится на широте φ на поверхности Марса, причем по модулю эта широта меньше φ_0. Максимальное расстояние до спутника, при котором он может наблюдаться, соответствует его положению на горизонте. Такое положение может наблюдаться на всех этих широтах, так как орбитальные периоды Фобоса и Деймоса не равны периоду обращения Марса вокруг своей оси, и они будут периодически восходить и заходить за горизонт. Величина максимального расстояния не зависит от широты и составляет

$$D_0 = \sqrt{L^2 - R^2},$$

а минимальный угловой диаметр спутника равен

$$\delta_0 = \frac{2r}{D_0} = \frac{2r}{\sqrt{L^2 - R^2}}.$$

Эта величина составляет 8′ для Фобоса и 1.8′ для Деймоса. Наименьшее расстояние от наблюдателя до спутника D можно получить из теоремы косинусов:

$$D = \sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi}.$$

Угловой диаметр спутника будет равен

$$\delta_0 = \frac{2r}{D} = \frac{2r}{\sqrt{L^2 + R^2 - 2LR\cos\varphi}}.$$

Эта величина увеличивается с уменьшением модуля широты и достигает максимума на экваторе:

$$\delta_\mathrm{E} = \frac{2r}{D_\mathrm{E}} = \frac{2r}{L - R}.$$

Значение δ_E равно 11′ для Фобоса и 2′ для Деймоса.

Для того, чтобы ответить на второй вопрос задачи, отметим, что в зависимости от точки наблюдения склонение Фобоса меняется в пределах ±21°, склонение Деймоса – в пределах ±8°. Склонение Солнца на Марсе колеблется в пределах ±25°, и на любой широте, где могут наблюдаться спутники, они могут оказаться в близком соединении с Солнцем или даже вступить на его диск. Их фаза при этом будет равна нулю. Так же, вне зависимости от широты, Фобос и Деймос могут иметь фазу, равную единице, даже несмотря на большие угловые размеры тени Марса. Чтобы иметь полную фазу и при этом не попасть в тень (при этом возможно погружение в полутень Марса), спутник должен наблюдаться на горизонте (это может быть на любой широте, кроме окрестностей полюсов), а Солнце – быть также у горизонта в противоположной части неба.

4. Рекомендации для жюри. Первая часть решения связана с определением широтной области на Марсе, где Фобос и Деймос могут наблюдаться над горизонтом. Эта часть оценивается в 2 балла, по одному за каждый из спутников. Следующая часть решения связана с диапазоном видимых диаметров Фобоса и Деймоса. Выражение для минимального диаметра оценивается в 1 балл, формула для максимального диаметра – в 2 балла. Еще один балл выставляется за указание граничных численных значений для Фобоса и Деймоса. Итого, вторая часть решения оценивается в 4 балла. Последние 2 балла выставляются за указание граничных значений фазы (1 балл – за обоснование возможности наблюдения фазы, стремящейся к нулю, и 1 балл – за обоснование возможности наблюдения фазы, равной единице).

5. Условие. Среднее угловое расстояние между двумя компонентами звезды α Центавра равно 18″, а параллакс этой звезды – 0.74″. С какого расстояния компоненты α Центавра можно различить в телескоп с диаметром объектива 10 см? Считать, что линия между компонентами звезды перпендикулярна направлению на Солнце, а угловое расстояние между ними при наблюдении с Земли не меняется.

5. Решение. Параллакс звезды π есть угол, под которым с этой звезды виден радиус орбиты Земли (1 а.е.). Этот угол равен $1''/r_0$, где r_0 – расстояние до звезды в парсеках. Обозначим расстояние между компонентами α Центавра (в астрономических единицах) как a. Если линия, соединяющая звезды, перпендикулярна лучу зрения, то угловое расстояние между звездами при наблюдении с Земли (в угловых секундах) составит

$$d_0 = \frac{a}{r_0} = a\pi.$$

Если наблюдатель удалится на расстояние r от α Центавра, то для углового расстояния между ее компонентами будет справедливо неравенство:

$$d \le \frac{a}{r} = \frac{d_0}{r\pi}.$$

Строгое равенство будет иметь место в том случае, если наблюдатель останется на линии, перпендикулярной отрезку, соединяющему звезды. Угловое разрешение телескопа (в угловых секундах) с диаметром объектива D (в сантиметрах) составляет

$$d_{\mathrm{M}} = \frac{A}{D},$$

где A=14 см. Приравнивая величины d и d_{M}, получаем

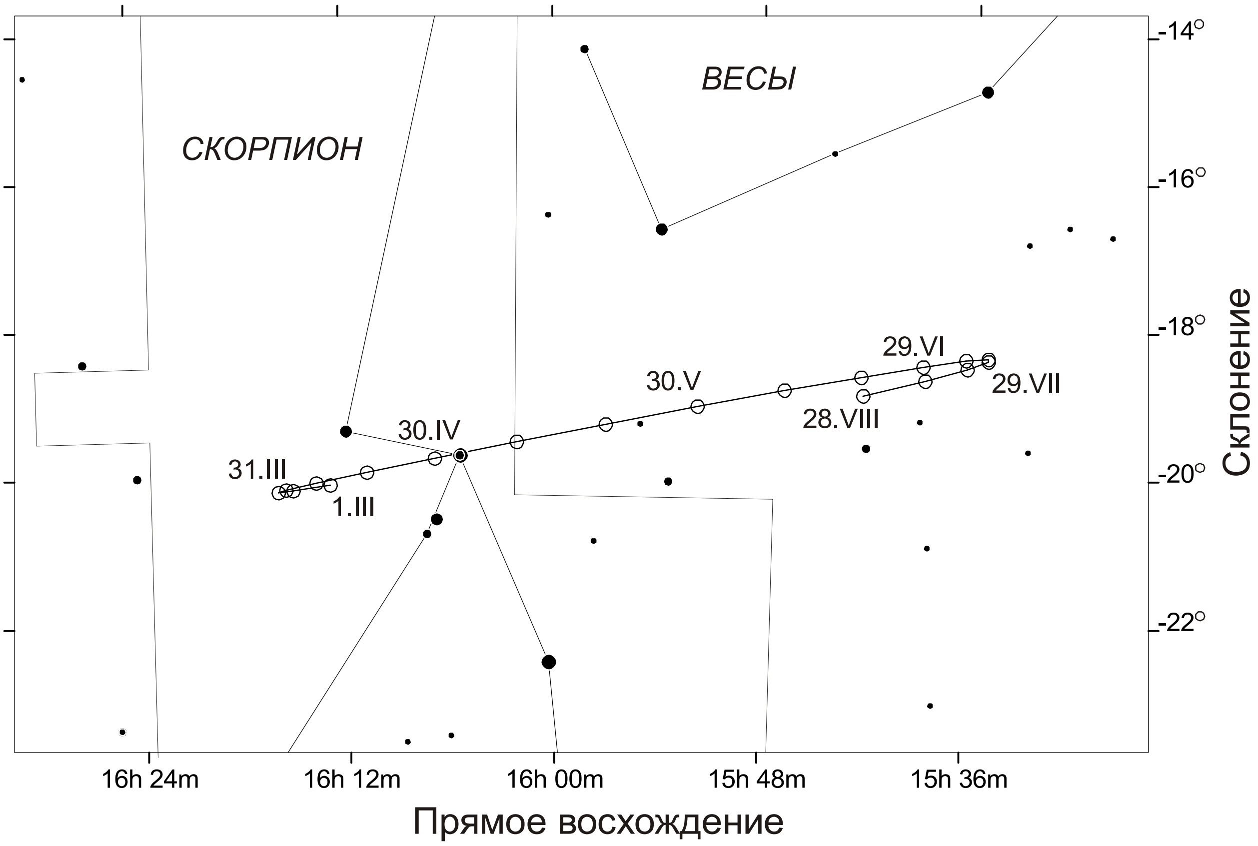
$$r \le \frac{Dd_0}{A\pi}.$$

Максимальное расстояние, с которого можно разрешить двойную звезду α Центавра в 10-см телескоп, равно 17 пк.

5. Рекомендации для жюри. Решение задачи четко разделяется на несколько этапов, но они могут выполняться в другом порядке и с использованием иной терминологии. К примеру, можно рассчитать параллакс звезды α Центавра, соответствующий ее предельному разрешению в 10-см телескоп, и из него получить расстояние.

Вывод связи параллакса звезды (либо расстояния до нее), углового и пространственного расстояния между компонентами оценивается в 3 балла. Этот вывод может быть записан в виде формулы, возможно численное нахождение расстояния между компонентами α Центавра. Запись условия разрешимости двойной системы оценивается в 2 балла, причем участники могут использовать другие известные формулы (например, $d=\lambda/D$) и получать значения, отличающиеся на 10-20%. Окончательный вывод о максимальном расстоянии оценивается еще в 3 балла.

6. Условие. На рисунке показан трек планеты Солнечной системы (положение среди звезд в разные моменты времени). Положения, отмеченные кружками, отстоят друг от друга на 10 дней, даты подписаны через 30 дней. Что это за планета?



6. Решение. Трек показывает видимое перемещение планеты в течение полугода (с марта по август). За это время планета вначале движется в прямом направлении, затем разворачивается и движется попятно, а затем вновь прямо. В середине дуги попятного движения, в мае, планета оказывается на границе созвездий Весов и Скорпиона, противоположно Солнцу (в чем можно убедиться также по координатам, указанным на карте). Следовательно, это внешняя планета, и в середине дуги попятного движения она вступила в противостояние с Солнцем.

Используя шкалу склонений, приведенных на карте, можно определить ее масштаб, а также видимую (угловую) скорость перемещения планеты вблизи противостояния во второй половине мая. Угловое расстояние между положениями планеты 20 и 30 мая составляет 1.3°, то есть угловая скорость равна 0.13° в день.

Пусть радиус орбиты планеты равен r, а радиус орбиты Земли – r_0. В момент противостояния планета располагается на расстоянии ($r - r_0$) от Земли. Скорости Земли r_0 и планеты v сонаправлены (наклон и эллиптичность орбиты планет не вносит существенного отклонения), и видимая угловая скорость планеты равна

$$\omega = \frac{v_0 - v}{r - r_0}.$$

Из III закона Кеплера или из выражения для первой космической скорости можно получить соотношение скоростей планеты и Земли:

$$v = v_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

Подставляя вторую формулу в первую, получаем:

$$\omega = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1-(r_0/r)^{1/2}}{1-(r_0/r)} = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1}{1+(r_0/r)^{1/2}} = \frac{v_0}{r+(r_0 r)^{1/2}}.$$

Обозначим отношение (r/r_0) – радиус орбиты в астрономических единицах – через a. Тогда последнее соотношение примет вид:

$$\omega = \frac{v_0}{r_0} \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}} = \omega_0 \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость орбитального вращения Земли, равная 0.986° в сутки. Мы получаем квадратное уравнение

$$a\,\omega + \sqrt{a}\,\omega - \omega_0 = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень:

$$a = \left(\frac{\sqrt{1+4\omega_0/\omega} - 1}{2} \right)^2.$$

Подставляя измеренное по графику значение ω, получаем радиус орбиты планеты: 5.3 а.е. Это планета Юпитер.

6. Рекомендации для жюри. Приведенное решение является одним из способов точно определить радиус орбиты планеты, из чего можно выяснить, какая именно это планета. Существуют другие как точные, так и приближенные методы, оценивать которые следует, исходя из их адекватности.

В частности, для дальних внешних планет, к которым относится Юпитер, можно определить длину дуги попятного движения (10°) и приравнять ее к удвоенному значению наибольшей элонгации Земли при наблюдении с планеты. Этот метод по сути пренебрегает орбитальным движением планеты и дает завышенную оценку ее расстояния от Солнца – 11 а.е. Вывод, что мы наблюдаем планету Сатурн, в этом случае оценивается 2 баллами, а указание, что оценка завышена, и мы наблюдаем Юпитер – 6 баллами.

При использовании метода, описанного выше, измерение угловой скорости по треку оценивается в 2 балла, составление уравнения для этой величины – в 3 балла, его решение – в 2 балла и указание названия планеты – в 1 балл.

Если правильный ответ (Юпитер) дан без каких-либо корректных обоснований, участнику олимпиады выставляется 3 балла.

11 класс

1. Условие. 22 июня в солнечный полдень наблюдатель, стоящий вертикально на ровной поверхности, обнаружил, что его тень имеет длину, равную его росту. На какой широте располагался наблюдатель?

1. Решение. Равенство высоты вертикального предмета и длины его тени на горизонтальной поверхности означает, что высота Солнца h составляет 45°. Так как картина наблюдается в солнечный полдень, Солнце располагается в верхней кульминации. Его высота в это время равна

$h = 90° - \varphi + \delta$, если Солнце располагается к югу от зенита ($\varphi > \delta$),
$h = 90° - \delta + \varphi$, если Солнце располагается к северу от зенита ($\varphi < \delta$).

Данные соотношения можно написать в виде одной формулы:

$$h = 90° - |\varphi - \delta|.$$

22 июня (в летнее солнцестояние) склонение Солнца δ положительно и равно углу наклона экватора к эклиптике ε (23.4°). Из предыдущих формул получаем выражение для широты места:

$$\varphi = \varepsilon \pm (90° - h).$$

Указанная картина могла наблюдаться на широтах –21.6° и +68.4°.

1. Рекомендации для жюри. Первым этапом решения задания является вывод о значении величины высоты Солнца над горизонтом. Этот этап оценивается в 2 балла. Запись соотношения для высоты Солнца в верхней кульминации может быть сделана участником олимпиады как в виде двух формул, так и одной формулой с применением модуля. Вместо высоты можно использовать соотношения для зенитного расстояния Солнца, каждый из этих подходов считается правильным и оценивается в 2 балла (в случае двух формул – по 1 баллу за каждую). Решение уравнения и формулировка ответа оценивается в 4 балла – по 2 балла за каждое из возможных решений. Таким образом, если в решении идет поиск только одного значения широты, итоговая оценка не может превышать 5 баллов.

2. Условие. По современным данным, массовая доля кислорода на Солнце составляет 0.8%. На сколько планетных атмосфер типа земной хватило бы солнечного кислорода?

2. Решение. Определим полную массу кислорода на Солнце:

$$M_{\mathrm{OS}} = 0.008 \cdot M_0 = 1.6 \cdot 10^{28} \text{ кг}.$$

Здесь M_0 – масса Солнца. Далее нам нужно определить массу атмосферы Земли. Это несложно сделать, зная атмосферное давление у поверхности нашей планеты p. Это есть сила, с которой столб атмосферы давит на единицу площади поверхности. Масса этого столба равна

$$\mu = p/g,$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли. Чтобы найти общую массу, умножим величину μ на площадь поверхности Земли:

$$m = 4\pi R_{\mathrm{E}}^2 \mu = \frac{4\pi R_{\mathrm{E}}^2 p}{g} = \frac{4\pi R_{\mathrm{E}}^4 p}{G M_{\mathrm{E}}}.$$

Здесь R_{E} и M_{E} – радиус и масса Земли соответственно. Масса атмосферы Земли составляет $5.2 \cdot 10^{18}$ кг. Содержание в ней кислорода составляет 21% по объему и практически такую же долю – по массе (так как молярные массы кислорода и основного атмосферного газа, азота, близки). В итоге, масса кислорода в атмосфере Земли составляет чуть более 10^{18} кг. Солнечного кислорода хватило бы на $1.5 \cdot 10^{10}$, то есть на 15 миллиардов атмосфер типа земной.

2. Рекомендации для жюри. Для решения задания участники олимпиады должны определить массу солнечного кислорода, этот этап оценивается в 1 балл. Далее необходимо найти массу атмосферы Земли (4 балла) и массу кислорода, который в ней содержится (1 балл). При этом участник олимпиады может рассчитать массовую долю кислорода в точности или считать его равной объемной доле при условии обоснования данного факта (близости молярных масс молекулярного азота и кислорода). Окончательный вывод оценивается в еще 2 балла.

3. Условие. Представьте, что Солнечная система влетела в очень плотное однородное облако темной пыли. В результате полная Луна в небе Земли стала слабее на 0.2^m. Перечислите все небесные объекты, которые будут видны на небе Земли невооруженным глазом. Каким (примерно) будет их блеск?

3. Решение. При постоянной плотности частиц пыли в единице объема ослабление света источника (в звездных величинах) пропорционально длине пути от источника света до наблюдателя. В случае наблюдения Луны источником света является Солнце. Расстояние между Землей и Луной пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием от обоих тел до Солнца, поэтому длина пути излучения составляет 1 а.е., а поглощение света в Солнечной системе и окрестностях – 0.2^m/а.е.

Для того, чтобы узнать, насколько изменился блеск других светил, нужно рассчитать длину пути света для каждого из них. В случае Солнца мы вновь имеем 1 а.е., и дневное светило ослабит блеск на 0.2^m, оставаясь очень ярким (-26.6^m). Визуально такое «потемнение» Солнца не было бы заметным, но оно вызвало бы существенные климатические изменения на Земле.

Блеск планет рассчитаем для случая их наибольшей элонгации (внутренние планеты) и противостояния (внешние планеты). Если обозначить радиус орбиты через a, то длина пути в первом и втором случаях составит

$$l_1 = a + \sqrt{a_0^2 - a^2}; \quad l_2 = 2a - a_0.$$

Здесь a_0 – радиус орбиты Земли. Звездная величина светил станет равной

$$m = m_0 + 0.2 \cdot l.$$

Здесь m_0 – блеск светила без ослабления пылью. Рассчитаем эти величины для ярких больших планет и запишем результаты в таблицу:

Объект	l, а.е.	m_0	m
Солнце	1	–26.8	–26.6
Луна	1	–12.7	–12.5
Меркурий	1.3	–0.1	0.2
Венера	1.4	–4.4	–4.1
Марс	2.0	–2.0	–1.6
Юпитер	9.4	–2.7	–0.8
Сатурн	18.0	0.4	4.0

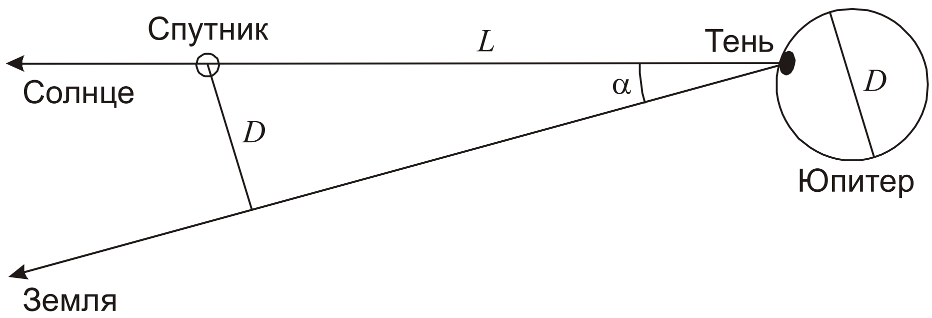
Получается, что яркие планеты останутся видимыми на небе, но если Меркурий, Венера и Марс практически сохранят свой блеск, то Юпитер будет выглядеть заметно потускневшим, а Сатурн вообще станет достаточно слабым объектом. Очевидно, что более далекие планеты видны не будут, так как Уран даже при отсутствии пыли едва заметен глазом, а пыль ослабила бы его блеск более чем на 7 звездных величин. Не будет виден и ярчайший из астероидов Веста, блеск которого ослабнет на 1^m. Но самое главное – с неба исчезнут все далекие звезды и объекты вне Солнечной системы, так как уже на расстоянии в 40 а.е. поглощение достигнет 8^m, что достаточно для исчезновения ярчайшей звезды ночного неба Сириуса.

Получается, что таблица содержит все объекты, которые останутся видимыми в небе Земли. К ним могут присоединяться только метеоры и (изредка) яркие кометы, при условии, что они окажутся на небольшом расстоянии от Солнца и Земли. На темном и совершенно пустом ночном небе будут видны только Луна и 5 планет, одна из которых будет достаточно слабой.

3. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является правильная зависимость ослабления света от расстояния, которое этот свет преодолевает. Данный этап оценивается в 3 балла. Вычисление блеска Солнца, Луны и пяти планет оценивается в 3 балла. Еще 2 балла выставляются за вывод о том, что другие объекты видны в небе Земли не будут.

4. Условие. При наблюдении с Земли угловое расстояние между галилеевым спутником Юпитера и его тенью на поверхности планеты равно видимому экваториальному диаметру Юпитера. Что это за спутник? Орбиты Земли, Юпитера и его спутника считать круговыми.

4. Решение. Изобразим Юпитер, его спутник с тенью и направления на Солнце и Землю:



Как видно из рисунка, угловое расстояние между спутником и его тенью при наблюдении с Земли есть угол, под которым с нашей планеты будет виден отрезок *D*, перпендикулярный линии визирования. Расстояние между спутником и Юпитером несравнимо меньше расстояния до Земли, поэтому диаметр Юпитера, видимый под тем же углом, должен иметь такую же величину *D*.

Обозначим угол между направлениями на Солнце и Землю как α. Земля для Юпитера – внутренняя планета, и для этого угла справедливо неравенство:

$$\sin\alpha \le \frac{a_E}{a_J}.$$

Здесь a_E и a_J – радиусы орбит Земли и Юпитера. Расстояние между спутником и тенью составит

$$L = \frac{D}{\sin\alpha} \ge \frac{D a_J}{a_E}.$$

Подставляя численные значения, получаем, что это расстояние не меньше 750 тысяч километров. Радиус орбиты спутника не меньше величины *L*. Следовательно, этим спутником может быть только Ганимед или Каллисто.

4. Рекомендации для жюри. Основой решения задачи является правильное построение рисунка (оценивается в 2 балла) и последующая формулировка условия равенства углового расстояния между спутником и тенью и углового диаметра Юпитера (оценивается еще в 2 балла). Формулировки, выполненные школьниками, могут несколько отличаться от указанных выше. Вычисление минимально возможного радиуса орбиты спутника Юпитера оцениваются еще в 2 балла, и по 1 баллу выставляется за указание каждого из двух спутников, удовлетворяющих условию задания, при условии, что не будут указаны другие спутники. В случае указания двух правильных и одного ошибочного спутника из последних двух баллов выставляется один.

5. Условие. В последнее время в средствах массовой информации много говорится том, что красный сверхгигант Бетельгейзе (α Ориона) в любой момент времени может взорваться, став Сверхновой звездой, которая на земном небе будет сравнима по блеску с Солнцем. Какой на самом деле будет звездная величина в максимуме вспышки Бетельгейзе, если в ближайшее время произойдет ее взрыв? С каким объектом неба будет сравнима по яркости Бетельгейзе в это время?

5. Решение. Бетельгейзе является красным сверхгигантом, и его абсолютная звездная величина M составляет около -5^m. Если Бетельгейзе взорвется как Сверхновая, его абсолютная звездная величина M_S будет не выше -18^m. Так как расстояние до Бетельгейзе существенно не изменится, для видимой звездной величины будет справедливо соотношение:

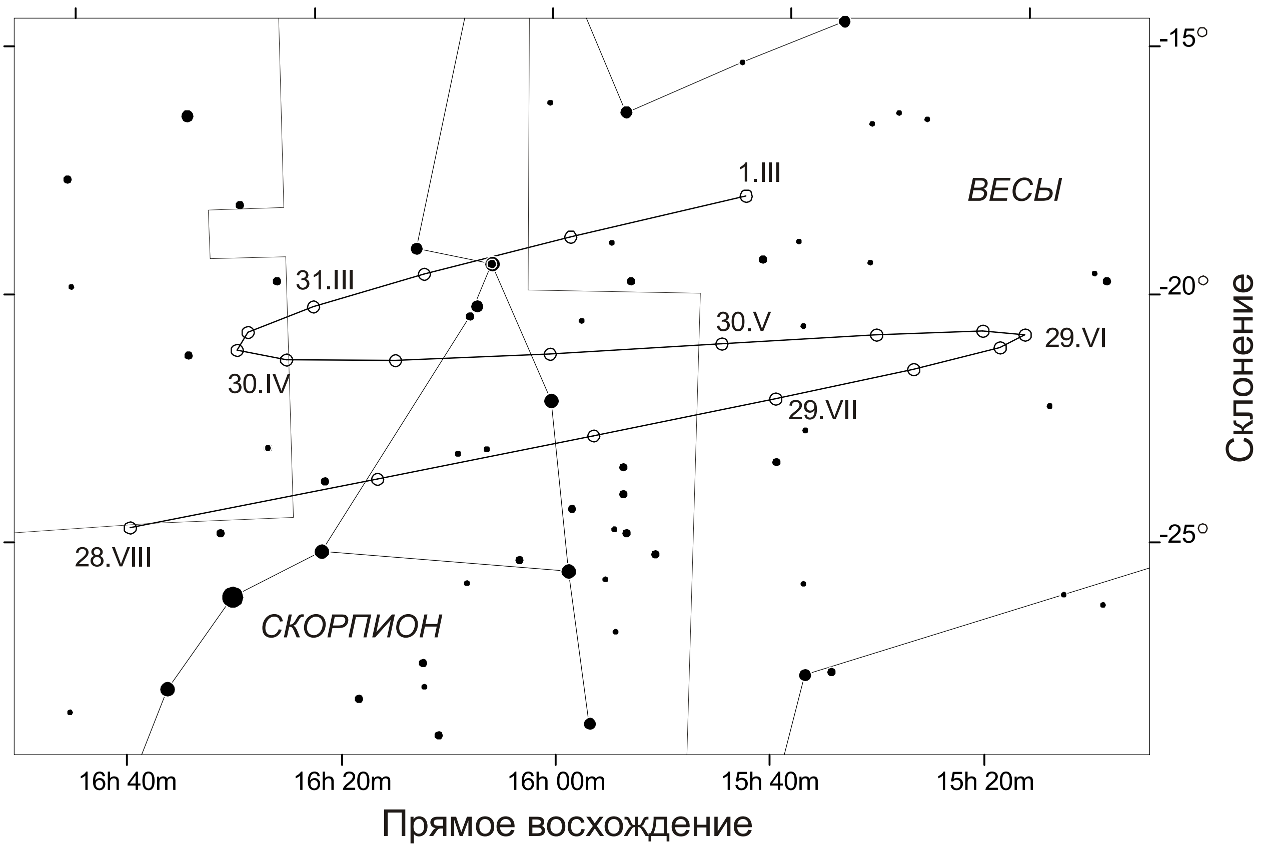
$$m_S = m + (M_S - M).$$

Нынешний блеск Бетельгейзе, одной из ярчайших звезд земного неба, колеблется между 0^m и 1^m. Принимая его равным 0.5^m, получаем, что в максимуме вспышки Бетельгейзе достигнет блеска -12.5^m и может сравниться с полной Луной. Вероятно, это будет ярчайшая из всех Сверхновых, упоминания о наблюдениях которых на Земле дошли до наших дней. Но это не будет идти ни в какое сравнение с видимой яркостью Солнца и не будет представлять угрозы для жизни на Земле.

5. Рекомендации для жюри. Данное задание направлено, прежде всего, на выявление представления участников олимпиаде о типичных наблюдаемых и физических свойствах звезд. Численных данных в условии не приводится, и участники должны получить их сами, исходя из информации условия. При этом допускается отличие принимаемых значений от указанных выше.

Абсолютная звездная величина Бетельгейзе (-5^m) определяется тем, что это звезда – красный сверхгигант. Данный этап решения оценивается в 2 балла, при этом допускается отличие этой величины на $1\text{-}2^m$. Правильное указание абсолютной звездной величины Сверхновой звезды также оценивается в 2 балла с допустимым отличием в $1\text{-}2^m$. Современная видимая звездная величина Бетельгейзе определяется из того, что это яркая звезда в созвездии Ориона, одна из ярчайших звезд неба. Данный этап оценивается в 1 балл при указании блеска Бетельгейзе в пределах от 0^m до 1^m. Вычисление звездной величины Бетельгейзе в случае вспышки оценивается в 2 балла, еще 1 балл ставится при указании Луны, как близкого по видимому блеску объекта.

6. Условие. На рисунке показан трек планеты Солнечной системы (положение среди звезд в разные моменты времени). Положения, отмеченные кружками, отстоят друг от друга на 10 дней, даты подписаны через 30 дней. Что это за планета?



6. Решение. Трек показывает видимое перемещение планеты в течение полугода (с марта по август). За это время планета вначале движется в прямом направлении, затем разворачивается и движется попятно, а затем вновь прямо. В середине дуги попятного движения, в мае, планета оказывается на границе созвездий Весов и Скорпиона, противоположно Солнцу (в чем можно убедиться также по координатам, указанным на карте). Следовательно, это внешняя планета, и в середине дуги попятного движения она вступила в противостояние с Солнцем.

Используя шкалу склонений, приведенных на карте, можно определить ее масштаб, а также видимую (угловую) скорость перемещения планеты вблизи противостояния во второй половине мая. Угловое расстояние между положениями планеты 20 и 30 мая составляет 3.5°, то есть угловая скорость равна 0.35° в день.

Пусть радиус орбиты планеты равен r, а радиус орбиты Земли – r_0. В момент противостояния планета располагается на расстоянии $(r - r_0)$ от Земли. Скорости Земли r_0 и планеты v сонаправлены (наклон и эллиптичность орбиты планет не вносит существенного отклонения), и видимая угловая скорость планеты равна

$$\omega = \frac{v_0 - v}{r - r_0}.$$

Из III закона Кеплера или из выражения для первой космической скорости можно получить соотношение скоростей планеты и Земли:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{r_0}{r}}.$$

Подставляя вторую формулу в первую, получаем:

$$\omega = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1-(r_0/r)^{1/2}}{1-(r_0/r)} = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{1}{1+(r_0/r)^{1/2}} = \frac{v_0}{r+(r_0 r)^{1/2}}.$$

Обозначим отношение (r/r_0) – радиус орбиты в астрономических единицах – через a. Тогда последнее соотношение примет вид:

$$\omega = \frac{v_0}{r_0} \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}} = \omega_0 \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a}}.$$

Здесь ω_0 – угловая скорость орбитального вращения Земли, равная 0.986° в сутки. Мы получаем квадратное уравнение

$$a\omega + \sqrt{a}\,\omega - \omega_0 = 0.$$

Это уравнение имеет один действительный корень:

$$a = \left(\frac{\sqrt{1+4\omega_0/\omega} - 1}{2} \right)^2.$$

Подставляя измеренное по графику значение ω, получаем радиус орбиты планеты: 1.5 а.е. Это планета Марс.

6. Рекомендации для жюри. Приведенное решение является одним из способов точно определить радиус орбиты планеты, из чего можно выяснить, какая именно это планета. Существуют другие как точные, так и приближенные методы, оценивать которые следует, исходя из их адекватности.

В частности, можно отметить, что это внешняя планета, вступающая в противостояние с Солнцем во второй половине мая, при этом она имеет существенную угловую скорость, недостижимую для Юпитера и более далеких планет (с количественным обоснованием), следовательно, мы наблюдаем Марс. Такое решение может оцениваться как правильное с выставлением 8 баллов, без количественных обоснований – 5 баллов. Можно также указать, что планета существенно отклоняется от линии эклиптики (трек растянут по вертикали), что указывает на наклон ее орбиты и близость к Земле. Такой ход рассуждений (с правильным ответом) оценивается в 6 баллов. Если правильный ответ (Марс) дан без обоснований, оценка составляет 3 балла.

При использовании метода, описанного выше, измерение угловой скорости по треку оценивается в 2 балла, составление уравнения для этой величины – в 3 балла, его решение – в 2 балла и указание названия планеты – в 1 балл.